

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**UNIDAD DE POSTGRADO**

**Exploración de la estructura de un conjunto de datos  
multidimensionales mediante el análisis tensorial**

**TESIS**

**para optar el título de Magíster en Estadística**

**AUTOR:**

**Erwin Kraenau Espinal**

**ASESORA:**

**María Estela Ponce Aruneri**

**Lima, Perú**

**2011**



# FICHA CATALOGRÁFICA

KRAENAU ESPINAL, ERWIN

Exploración de la Estructura de un Conjunto de Datos Multidimensionales Mediante el Análisis Tensorial, (Lima) 2011.

xii, 131 p., 29,7 cm., (UNMSM, Magister, Estadística, 2011).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Estadística I. UNMSM/FdeCM II. Título (Serie)

# RESUMEN

## EXPLORACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE UN CONJUNTO DE DATOS MULTIDIMENSIONALES MEDIANTE EL ANÁLISIS TENSORIAL

ERWIN KRAENAU ESPINAL

SETIEMBRE – 2011

Orientador: Mg. María Estela Ponce Aruneri

Grado obtenido: Magister en Estadística

-----

En muchas ocasiones el investigador necesita de técnicas para extraer información o conocer la estructura de los datos y métodos de visualización para el conocimiento parcial o total del proceso subyacente que los generó.

En esta tesis se desarrollan nuevas técnicas y algoritmos para el análisis exploratorio y reducción de datos multidimensionales utilizándose como base el análisis tensorial, así como también se propone una nueva técnica de simulación de datos provenientes de una distribución normal multivariante, utilizando el proceso inverso de la técnica de las Componentes Principales.

Entre las técnicas desarrolladas están el Diagrama de Rosa, Diagrama Circular 3D, Proyecciones sobre Superficies Cilíndricas y Esféricas, entre otras. También algunas de estas nuevas técnicas propuestas se basaron en la Projection Pursuit desarrollada por Friedman y Tukey en el año 1974.

Los resultados fueron buenos en la mayoría de los casos. En donde no se tuvo éxito fue en el histograma esférico por su difícil interpretación. Los mejores resultados fueron obtenidos al proyectar los datos sobre un sistema cilíndrico, donde inclusive se tiene la posibilidad de visualizar datos discordantes.

PALABRAS CLAVE: ESTRUCTURA  
REDUCCIÓN DE LA DIMENSIÓN  
ANÁLISIS TENSORIAL  
SIMULACIÓN DE VECTORES  
CÁLCULO VECTORIAL

# **ABSTRACT**

## **EXPLORING THE STRUCTURE OF A MULTIDIMENSIONAL DATASET THROUGH THE TENSOR ANALYSIS**

ERWIN KRAENAU ESPINAL

SEPTEMBER – 2011

Guiding: Mg. María Estela Ponce Aruneri

Degree obtained: Magister in Statistics

-----

In many cases the researcher needs techniques to extract information or know the data structure and visualization methods for partial or full knowledge of the underlying process that generated it.

This thesis develops new techniques and algorithms for exploratory analysis and reduction of multidimensional data using tensor based on the analysis and also proposes a new technique of simulation data from a multivariate normal distribution, using the reverse process of technique of Principal Components.

Among the techniques developed are Rose Diagram, Pie Chart 3D Projections cylindrical and spherical surfaces, among others. Also some of these new techniques proposed were based on Projection Pursuit developed by Friedman and Tukey in 1974.

The results were good in most cases. Where success was not taken in by his hard spherical histogram interpretation. The best results were obtained by projecting the data on a cylindrical system, where even have the ability to display discordant data.

KEYWORDS:                      STRUCTURE  
                                        DIMENSION REDUCTION  
                                        TENSOR ANALYSIS  
                                        VECTOR SIMULATION  
                                        VECTOR CALCULUS

# EXPLORACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE UN CONJUNTO DE DATOS MULTIDIMENSIONALES MEDIANTE EL ANÁLISIS TENSORIAL

## CONTENIDO

RESUMEN.....	4
ABSTRACT.....	5
CONTENIDO.....	6
INTRODUCCIÓN.....	9
 CAPÍTULO I : DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE Y REDUCCIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD.....	11
1. Introducción.....	11
2. Distribución Normal Bivalente.....	11
3. Distribución Normal Multivalente.....	12
4. Propiedades de la Distribución Normal.....	13
5. Análisis de Componentes Principales.....	13
6. Projection Pursuit.....	15
6.1 Notación.....	16
6.2 Índice de Proyección.....	17
 CAPÍTULO II : FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS TENSORIAL.....	19
1. Introducción.....	19
2. Convención de Sumatoria.....	19
3. Transformaciones de Coordenadas Curvilíneas.....	21
4. Vectores y Tensores.....	29
4.1 Tensores Contravariantes.....	30
4.2 Un Invariante.....	31
4.3 Vectores Covariantes.....	31
4.4 Tensores Covariantes.....	31
4.5 Tensores Mezclados.....	32
4.6 El Carácter Tensorial del Delta de Kronecker.....	32
4.7 Multiplicación Externa de Tensores.....	33
4.8 Contracción.....	33
4.9 Multiplicación Interna de Tensores.....	34
4.10 Pruebas del Carácter Tensorial.....	35

4.11 Algunas Propiedades de los Tensores.....	37
4.12 Suma y Resta de Tensores.....	39
5. El Tensor Métrico.....	40
5.1 El Tensor Métrico o Fundamental.....	40
5.2 Los Vectores Base $g_1$ , $g_2$ y $g_3$ .....	43
CAPÍTULO III: SISTEMAS COORDENADOS Y GEODÉSICAS.....	47
1. Introducción.....	47
2. Sistema de Coordenadas Cartesianas.....	47
3. Sistema de Coordenadas Cilíndricas.....	48
4. Sistema de Coordenadas Esféricas.....	51
5. Geodésicas.....	53
6. Símbolos de Christoffel en Sistemas Coordinados.....	59
6.1 Símbolos de Christoffel para Coordenadas Cilíndricas.....	59
6.2 Símbolos de Christoffel para Coordenadas Esféricas.....	60
7. Obtención de las Geodésicas.....	62
7.1 En Coordenadas Polares.....	62
7.2 En Coordenadas Cilíndricas.....	66
7.3 En Coordenadas Esféricas.....	67
CAPÍTULO IV: DESARROLLO DE LOS ALGORITMOS.....	70
1. Introducción.....	70
2. Simulación de Vectores Normales Bivariados.....	70
3. Simulación de Vectores Normales Multivariados.....	73
4. Búsqueda de la Projection Pursuit.....	76
CAPÍTULO V : DISEÑO DEL SOFTWARE Y RESULTADOS.....	78
1. Introducción.....	78
2. Visualización en Coordenadas Polares.....	78
2.1 Gráfico en Coordendas Polares de la Función de Densidad...	78
2.2 Histograma Clásico Transformado en Coordendas Polares...	79
2.3 Diagrama de Rosa.....	80
2.4 Diagrama de Dispersión en Coordenadas Polares.....	81
2.5 Histograma Circular 3D en Coordendas Polares.....	82
3. Visualización en Coordenadas Cilíndricas.....	86
3.1 Proyección sobre una Superficie Cilíndrica.....	86
3.2 Proyección de una Estructura sobre una Superficie Cilíndrica	88
4. Visualización en Coordenadas Esféricas.....	91
4.1 Proyección sobre una Superficie Esférica.....	91
4.2 Histograma Esférico.....	93
5. Cálculo de las Geodésicas.....	96
5.1 Para la Superficie Cilíndrica.....	96
5.2 Para la Superficie Esférica.....	97

6.	Aplicación a un Caso Real.....	97
6.1	Utilizando Projection Pursuit.....	98
6.2	Proyectando los Datos sobre un Sistema Cartesiano 3D.....	99
6.3	Utilizando Diagramas de Rosa.....	100
6.4	Utilizando el Histograma Circular 3D.....	100
6.5	Proyectando los Datos sobre una Superficie Cilíndrica.....	101
6.6	Proyectando los Datos sobre una Superficie Esférica.....	103
6.7	Cálculo de las Distancias mediante las Geodésicas.....	105
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.....		107
BIBLIOGRAFÍA PRIMARIA.....		109
ANEXO	: CÓDIGO FUENTE DE LOS PROGRAMAS.....	110



# INTRODUCCIÓN

Gran parte de la Estadística está basada en el supuesto de normalidad de los datos y muchos análisis se basan en la comparación y comprobación de este supuesto. La distribución normal tiene propiedades harto conocidas, entre las cuales está la forma de la distribución de los datos así como el comportamiento de las curvas de contornos que se forman. En general si los datos fueron generados por vectores aleatorios normales, estos formarían regiones esféricas o elípticas en dos o más dimensiones. No es natural entonces utilizar sistemas coordenados cartesianos, lo más adecuado es el uso de sistemas coordenados no cartesianos, como por ejemplo los cilíndricos o esféricos entre otros. El uso de otros sistemas coordenados, tiene como base el análisis tensorial.

En esta tesis, se pretende responder a la pregunta: ¿Será posible explorar un conjunto de datos multidimensionales en un sistema no cartesiano para detectar estructuras subyacentes a este?. Se justifica el hacerlo ya que casi no hay antecedentes de lo que se plantea.

Para poder responder la pregunta anterior se desarrolla una nueva técnica para el análisis exploratorio de datos multidimensionales, se encuentran las estructuras subyacentes a este conjunto de datos utilizando sistemas no cartesianos basándose en el análisis tensorial y, se diseña un software en MATLAB adjunto a esta nueva técnica de exploración.

El Capítulo I trata sobre los conceptos de la distribución normal multivariante, así como también técnicas de reducción de la dimensionalidad entre las cuales está el Análisis de Componentes Principales y la Projection Pursuit, necesarias para la comparación con el comportamiento teórico y proyección de los datos, respectivamente.

El Capítulo II trata sobre los conceptos del análisis tensorial necesarios para la transformación de datos multidimensionales para poder ser expresados en distintos sistemas coordenados, como lo son el cilíndrico y esférico entre otros. También se describe las propiedades de los tensores y sus operaciones fundamentales. Adicionalmente, se trata la notación indicial o sumación de Einstein.

En el Capítulo III se presentan y describen detalladamente mediante el análisis tensorial los sistemas coordenados que se utilizan en el presente trabajo. También se tratan los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie para la

formación de los sistemas de ecuaciones diferenciales que generan las geodésicas respectivas en cada uno de los sistemas coordenados utilizados.

El Capítulo IV se describe detalladamente los algoritmos de simulación de datos multivariados, así como el algoritmo de búsqueda del índice de proyección de la técnica de la Projection Pursuit.

En el Capítulo V se muestran los pasos para el diseño del software y los resultados obtenidos para las simulaciones. También se aplica estas nuevas técnicas exploratorias a la base de datos real Crabs.

El Capítulo VI es el de las conclusiones.

Los códigos fuentes de los respectivos programas diseñados en MATLAB se ubican en el Anexo.

# CAPÍTULO I

## DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE Y REDUCCIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD

### 1. INTRODUCCIÓN

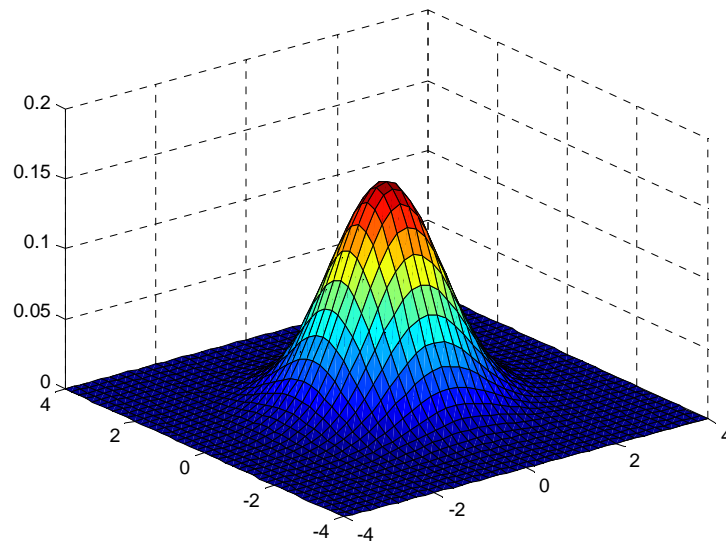
En este capítulo se describe uno de los importantes y más comúnmente densidades multivariadas utilizadas: la Distribución Normal Multivariante. Sobre esta distribución se basa el análisis exploratorio de datos desarrollado en este trabajo. También se presentan las conexiones entre el Análisis de Componentes Principales (PCA), la transformación de Karhunen-Loève (Karhunen-Loève Transformation - KLT), Projection Pursuit - PP. Estos métodos, se basan en las propiedades matemáticas que resultan de aplicar una transformación lineal a un vector aleatorio.

### 2. DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIANTE

Sea el vector aleatorio bidimensional  $(X_1, X_2)$  con densidad conjunta:

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} \quad (1.1)$$
$$-\infty < X_1 < \infty, \quad -\infty < X_2 < \infty, \quad -1 < \rho < 1, \quad 0 < \sigma_1, \quad 0 < \sigma_2$$

En estas condiciones se dice que el vector aleatorio tiene una distribución normal bivalente como es mostrado en la Figura 1.1 (obtenido a partir del Programa 1 del Anexo).



**Figura 1.1. Densidad Normal Bivalente.**

### 3. DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE

Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  un vector aleatorio  $p$ -dimensional que se designa como elementos de un vector  $\mathbf{X}$  por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$$

El vector aleatorio  $\mathbf{X}$  se distribuye según la normal  $p$ -variante si la densidad conjunta de  $X_1, X_2, \dots, X_p$  es:

$$f(\mathbf{X}) = f(X_1, X_2, \dots, X_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})} \quad (1.2)$$

$$-\infty < X_i < \infty \quad i = 1, 2, \dots, p$$

o

$$\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Donde

- a)  $\Sigma$  es una matriz simétrica definida positiva, cuyos elementos  $\sigma_{ij}$  son constantes (no variables aleatorias).
- b)  $\mu$  es un vector  $p \times 1$ , cuyos elementos  $\mu_i$  son constantes.

#### 4. PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

- a) Si un vector aleatorio sigue una distribución normal multivariante, las distribuciones marginales son también normales [7]. Igualmente el resultado recíproco se cumple también.
- b) Las distribuciones condicionadas de cualquier dimensión son también normales [7].
- c) En el caso de que se tenga un conjunto de variables normales la incorrelación implica independencia estocástica, cosa, que en general, no es cierta, pero si en el caso de variables aleatorias normales [7].
- d) Un caso importante de distribución normal  $k$ -dimensional es aquel, en el que todas las variables son independientes. En este caso todas las covarianzas serán nulas y la matriz de varianzas será diagonal

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{kk} \end{bmatrix}$$

- e) Si  $\mathbf{X}$  está distribuido como  $N_p(\mu, \Sigma)$ , entonces cualquier combinación lineal de variables  $\mathbf{a}'\mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_p X_p$  está distribuida como  $N(\mathbf{a}'\mu, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$ . También, si  $\mathbf{a}'\mathbf{X}$  está distribuida como  $N(\mathbf{a}'\mu, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$  para cualquier  $\mathbf{a}$ , entonces  $\mathbf{X}$  debe de ser  $N_p(\mu, \Sigma)$ .

#### 5. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

En estadística, el análisis de componentes principales (en español ACP, en inglés, PCA) es una técnica utilizada para reducir la dimensionalidad de un

conjunto de datos. Intuitivamente la técnica sirve para hallar las causas de la variabilidad de un conjunto de datos y ordenarlas por importancia.

La técnica PCA es también conocida como la transformación de Karhunen-Loève (Karhunen-Loève Transformation - KLT) debido a que fue desarrollada de manera independiente por Karhunen y generalizada posteriormente por Loève.

Dado un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)' \in \mathcal{R}^p$ , con momentos de segundo orden finitos, se define la KLT como la transformación lineal de  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}'\mathbf{X} \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)' \in \mathcal{R}^m$  ( $m \leq p$ ) es el vector transformado, y la matriz  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]' \in \mathcal{R}^{p \times m}$  se forma colocando en las columnas los primeros  $m$  autovectores normalizados de la matriz de covarianzas  $\Sigma = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})']$ , ordenados por orden decreciente de sus autovalores no nulos asociados, esto es,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ .

## PROPIEDADES

- a) Las variables aleatorias transformadas  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  son no correlacionadas, es decir, poseen covarianzas nulas

$$E[(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y)(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y)'] = 0 \quad \forall i \neq j \quad (1.4)$$

- b) Las variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  corresponden a proyecciones de las variables originales en las direcciones de máxima (o mínima) varianza. Es decir, de todas las posibles proyecciones  $\mathbf{Y} = \mathbf{V}'\mathbf{X}$ , la varianza de  $\mathbf{Y}$  resulta máxima (o mínima) si se elige la dirección dada por los autovectores de la matriz de covarianzas, esto es,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$ . Además, las varianzas de las variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  están dadas por los autovalores  $\lambda_i$  asociados a los autovectores  $\mathbf{v}_i$ .
- c) Dado un vector cualquiera  $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{R}^p$ , la aproximación de orden  $m$  dada por el desarrollo en la base ortonormal definida por los  $m$  autovectores de  $\Sigma$  más relevantes es

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X} + \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{v}_i \quad (1.5)$$

con  $c_i = (\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}})' \mathbf{v}_i$ ; que es una representación óptima en el sentido que minimiza el error cuadrático medio  $E[\|\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0\|^2]$ .

La tercera propiedad muestra claramente la importancia de la KLT como técnica para la reducción de la dimensión de un conjunto de datos ya que, usualmente en las aplicaciones, la matriz de covarianzas contiene solo unos pocos autovalores relevantes y puede considerarse  $m \ll p$  con un error cuadrático medio despreciable. Esto permite transformar los datos originales de dimensión elevada, en un nuevo conjunto de dimensión reducida donde las características intrínsecas de los datos originales se conservan [5].

En el caso que sea necesario que las variables transformadas, además de ser no correlacionadas, tengan varianza unitaria  $\Sigma_Y = \mathbf{I}$  se obtiene la siguiente transformación:

$$\mathbf{Y} = \Lambda^{-1/2} \mathbf{V}' \mathbf{X} \quad (1.6)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal con los autovalores relevantes definida anteriormente.

## 6. PROJECTION PURSUIT

Freidman y Tukey (1974) describieron la projection pursuit como un camino de búsqueda para explorar una estructura multidimensional de datos no lineal examinando muchas posibles proyecciones en dos planos. La idea es que la proyección bidimensional ortogonal de los datos debe mostrar la estructura original de los datos.

El análisis de datos utilizando la projection pursuit logra encontrar muchas proyecciones interesantes, pero la calidad de la proyección se mide por un índice. En muchos casos el interés es la no normalidad, entonces el índice de proyección cuantifica la desviación de la normalidad. El índice es conocido como el índice Chi cuadrado y es desarrollado en la metodología de Posse [4].

Este método consiste básicamente de dos partes:

- Un índice de la projection pursuit que mide el grado de la estructura (o desvío de la normalidad)

- Un método para encontrar la proyección que produce el mayor valor del índice.

Posse utilizó una búsqueda aleatoria para localizar el punto óptimo global del índice de proyección y lo combina con las estructura retiradas de Freidman para que se logre una secuencia interesante en proyecciones bidimensionales. Cada proyección encontrada muestra una estructura que es menos importante (en términos del índice de proyección) que la anterior [5].

## 6.1 NOTACIÓN

- $\mathbf{X}$  es una matriz  $n \times d$ , donde cada fila  $\mathbf{x}_i$ , que corresponde a una observación  $d$ -dimensional y  $n$  es el número de datos.
- $\mathbf{Z}$  es la versión esferizada de  $\mathbf{X}$ .
- $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  es el vector de medias muestrales de tamaño  $d$ , donde  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{1}$ .
- $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  es la matriz de covarianza muestral, donde  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}' \left( \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right) \mathbf{X}$ .
- $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  son vectores ortonormales tal que ( $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} = 1$  y  $\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\beta} = 0$ ) son vectores  $d$ -dimensionales que genera el plano de proyección.
- $P(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  es el plano de proyección generado por  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ .
- $z_i^\alpha$ ,  $z_i^\beta$  son las proyecciones esferizadas de las observaciones  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ , donde

$$z_i^\alpha = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}, \quad z_i^\beta = \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\beta}$$

$(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$  denota el plano donde el índice es máximo.

- $PI_{\chi^2}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  denota la proyección del índice Chi-cuadrado evaluado utilizando los datos de proyección sobre el plano espaciado por  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\beta}$ .
- $\phi_2$  es la función de densidad normal bivariada.
- $c_k$  es la probabilidad evaluada sobre la  $k$ -ésima región utilizando la función de densidad normal estándar bivariada. El valor se obtiene de  $c_k = \int \int_{B_k} \phi_2 dz_1 dz_2$ , donde  $B_k$  es una caja en el plano de proyección.
- $I_{B_k}$  es la función indicadora de la región  $B_k$ , que es una de las particiones del plano.



- $\eta_j = \pi j / 36$ ,  $j = 0, \dots, 8$  es el ángulo por el cual el dato es rotado en el plano antes de ser asignado a una de las regiones  $B_k$ .
- $\alpha(\eta_j)$  y  $\beta(\eta_j)$ , donde
 
$$\begin{aligned}\alpha(\eta_j) &= \alpha \cos \eta_j - \beta \sin \eta_j \\ \beta(\eta_j) &= \alpha \sin \eta_j + \beta \cos \eta_j\end{aligned}$$
- $c$  es un escalar que determina el tamaño de la vecindad alrededor de  $(\alpha^*, \beta^*)$  que es utilizado en la búsqueda de planos con el objeto de encontrar mejores valores del índice de proyección.
- $\mathbf{v}$  es un vector uniformemente distribuido sobre la esfera unitaria  $d$ -dimensional.
- $\gamma$  especifica el número de iteraciones sin un incremento en el índice de proyección al mismo tiempo que el tamaño de la vecindad es dividida.
- $m$  representa el número de búsquedas aleatorias para encontrar el mejor plano.

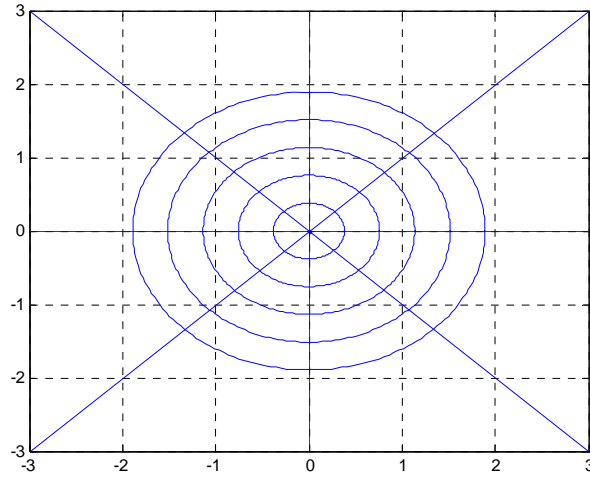
## 6.2 ÍNDICE DE PROYECCIÓN

La Projection Pursuit se realiza a través de la proyección de las variables en diferentes hiperplanos para encontrar el más interesante según el Índice de Proyección Chi-cuadrado. Este procedimiento se realiza a través de dos etapas:

- a) **Búsqueda de la no-normalidad de los datos.** El plano es dividido en 48 regiones o cajas  $B_k$  distribuidas en anillos (Figura 1.2), cada una con un ancho angular de  $\pi/2$  radianes y de ancho radial  $\sqrt{2 \ln 6}/5$ , el cual garantiza que cada región tenga aproximadamente la misma probabilidad (1/48) para la distribución normal bivariante. El Índice de Proyección Chi cuadrado está dado por

$$PI_{\chi^2}(\alpha, \beta) = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{c_k} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{B_k} \left( z_i^{\alpha(\eta_j)}, z_i^{\beta(\eta_j)} \right) - c_k \right]^2 \quad (1.7)$$

Una de las ventajas del uso del índice Chi cuadrado es que no se ve afectado en gran forma por los datos discordantes y busca la proyección que da como resultado el mayor de los índices Chi cuadrado.



**Figura 1.2. Disposición de las Regiones  $B_k$  para el Índice de Proyección Chi-cuadrado.**

- b) Búsqueda de la estructura.** El algoritmo inicializa aleatoriamente los vectores  $\alpha$  y  $\beta$ , para crear un mejor primer plano ( $\alpha^*$  y  $\beta^*$ ), luego se genera dos planos vecinos dados por las ecuaciones (1.8) y se evalúa el índice Chi cuadrado para ellos, si uno de ellos presenta una mejoría en el índice éste será el nuevo mejor plano, de lo contrario se generan dos nuevos planos vecinos. Si después de cierto número de iteraciones no ha habido mejoría entonces se reduce el tamaño de la vecindad de búsqueda a través de la disminución del parámetro  $c$ .

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\alpha^* + c v}{\|\alpha^* + c v\|} & b_1 &= \frac{\beta^* - (a_1' \beta^*) a_1}{\|\beta^* - (a_1' \beta^*) a_1\|} \\
 a_2 &= \frac{\alpha^* - c v}{\|\alpha^* - c v\|} & b_1 &= \frac{\beta^* - (a_2' \beta^*) a_2}{\|\beta^* - (a_2' \beta^*) a_2\|}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

# CAPÍTULO II

## FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS TENSORIAL

### 1. INTRODUCCIÓN

Un espacio euclidiano se caracteriza por el hecho que admite sistemas coordenados cartesianos que lo cubren completamente. Sin embargo, existen espacios de naturaleza más general, tal como una superficie curvada, la cual no permite la existencia de un único sistema coordenado que la cubra completamente. El objeto principal del cálculo tensorial es la investigación de las relaciones que permanecen invariantes cuando se cambia de un sistema de coordenadas a otro. Un tensor es cierta clase de entidad algebraica de varias componentes, en este capítulo se generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido. Para esto se desarrolla y utiliza el convenio de sumación de Einstein.

### 2. CONVENCION DE SUMATORIA

De las varias notaciones desarrolladas para el cálculo tensorial, la *indicial* o *sumación de Einstein*, ofrece muchas ventajas; por lo que esta convención será utilizada aquí. Letras latinas  $i, j, k$ , etc., y las letras griegas  $\alpha, \beta, \gamma$ , ..., etc., son utilizadas para índices, como subíndices ( $a_i$ ) y como superíndices ( $a^i$ ). Por tanto las tres cantidades  $a^1, a^2, a^3$ , son denotadas por el símbolo  $a^i$ . Simbólicamente esto puede ser escrito

$$a^i = (a^1, a^2, a^3)$$

En esta relación  $a$  es simplemente un conjunto de tres cantidades. Operaciones como la multiplicación o división no están implicadas. Si  $i$  y  $j$  van de 1 a 3, cada uno de los siguientes símbolos  $a_j^i, a_{ij}$ , y  $a^{ij}$  representa nueve cantidades.

De acuerdo a esta notación, una suma es aplicada cuando el índice es repetido. Por ejemplo

$$b_i c_j^i = b_1 c_j^1 + b_2 c_j^2 + b_3 c_j^3 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Un índice repetido es llamado *índice dummy*, *repetido* o *umbral*, a causa de que los valores del término no dependen del símbolo utilizado. Un índice el cual no está repetido es llamado *índice libre*.

Cuando un sufijo ocurre que no se repite en un término, será entendida que toma valores en el conjunto  $(1, 2, 3, \dots, n)$  donde  $n$  es un entero especificado llamado el rango. Evaluando  $a_i = b_i$  para el rango  $(1, 2, 3)$  se obtiene

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

Las sumas del tipo

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{(n)} x_{(n)}$$

Pueden ser acortadas de la forma siguiente

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Es conveniente reemplazar el subíndice de las cantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  por los superíndices  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . La suma puede ser expresada como

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x^i$$

Ahora se puede eliminar el símbolo  $\Sigma$ . El índice de sumación es un índice dummy desde que el resultado final es independiente de la letra utilizada. Por ejemplo

$$S = a_i x^i = a_j x^j = a_\alpha x^\alpha = a_B x^B$$

## EL DELTA DE KRONECKER

Si  $x^1, x^2, \dots, x^n$  son  $n$  variables independientes,  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ . Aquí  $\delta_j^i$  es conocida como delta de Kronecker.

Si  $i = j$ ,  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 1$ .

Si  $i \neq j$ , no hay cambio en la variable  $x^i$  si se cambia  $x^j$ , desde que ellas son variables independientes, se tiene que  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$ .

Las deltas de Kronecker,  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_j^i$ ,  $\delta^{ij}$ , son símbolos que llevan dos índices, y ellas toman los valores de  $\delta_j^i = 1$  cuando  $i = j$  y  $\delta_j^i = 0$  cuando  $i \neq j$ .

Cuando  $j = i$ , el término  $\delta_j^i$  llega a ser  $\delta_{(i)}^{(i)}$ . Aquí se tiene un índice repetido el cual no representa una sumación como fue definido anteriormente.

Supóngase que  $j = i$  y los valores de  $i$  van de 1 a  $n$ ; entonces

$$\delta_i^j = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = \dots = \delta_{(n)}^{(n)} = 1$$

Si  $j = 1$  y  $i$  va de 2 a  $n$ ,

$$\delta_i^j = \delta_2^1 = \delta_3^1 = \delta_4^1 = \dots = \delta_n^1 = 0$$

Sea  $j = i$  y  $i$  va de 1 a 4; entonces

$$\delta_j^i = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = \delta_4^4 = 1$$

La suma de las cuatro deltas de Kronecker serían 4; por tanto, se puede escribir en términos generales la relación

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \dots + \delta_{(n)}^{(n)} = 1 + \dots + 1 = n$$

### 3. TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS CURVILÍNEAS

La ventaja de describir las relaciones entre cantidades geométricas en términos de ecuaciones tensoriales generalizadas es que esas relaciones son verdaderas para todos los sistemas coordenados. Cuando es necesario considerar cálculos numéricos para la solución de los problemas, es también necesario trasladar el vector y las ecuaciones del tensor generalizado en sistemas de coordenadas específicos. Sistemas de coordenadas cartesianos, esféricos, elipsoidales, y polares son ejemplos de casos especiales de sistemas de coordenadas curvilíneas. Si los ejes curvilíneos son ángulos rectos, el sistema es llamado *sistema curvilíneo ortogonal*.

Un espacio dado  $V$  está referido a los ejes cartesianos ortogonales  $Y_i$ . Las coordenadas de cualquier punto  $P$  en el espacio  $V$  son representadas por  $(y_1, y_2, y_3)$ . Un conjunto de relaciones que conecta las variables  $(y_1, y_2, y_3)$  con otro nuevo  $(x_1, x_2, x_3)$  es conocido como ecuaciones de transformaciones de coordenadas. Por lo que

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(y_1, y_2, y_3) \\x_2 &= x_2(y_1, y_2, y_3) \\x_3 &= x_3(y_1, y_2, y_3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

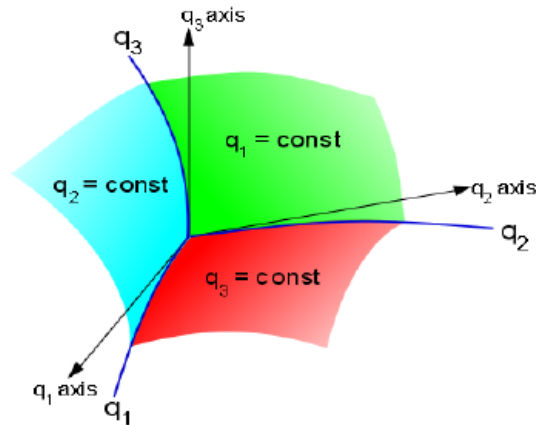
Estas ecuaciones se asumen que son inyectivas y continuamente diferenciables en todos los puntos a través del espacio  $V$ . Se asume también que esas ecuaciones pueden ser resueltas para producir las ecuaciones de transformación inversa en la cual las funciones son inyectivas y continuamente diferenciables con respecto a  $x_i$ . Las ecuaciones son

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(x_1, x_2, x_3) \\y_2 &= y_2(x_1, x_2, x_3) \\y_3 &= y_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

En las ecuaciones (2.1) sea  $x_1 = C_1$ ,  $x_2 = C_2$ ,  $x_3 = C_3$ , donde  $C_1$ ,  $C_2$ , y  $C_3$  son constantes. Esas ecuaciones son

$$\begin{aligned}x_1(y_1, y_2, y_3) &= C_1 \\x_2(y_1, y_2, y_3) &= C_2 \\x_3(y_1, y_2, y_3) &= C_3\end{aligned}\tag{2.3}$$

y ellas representan las superficies  $S_1$ ,  $S_2$ , y  $S_3$  como se muestra en la Figura 2.1



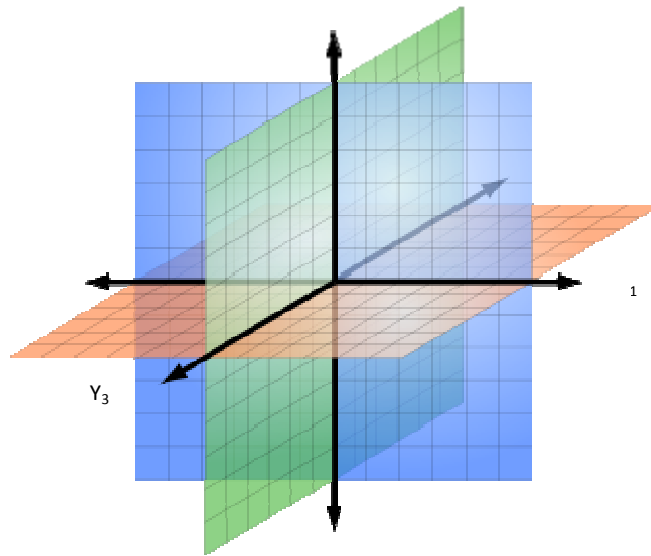
**Figura 2.1. Sistema de Coordenadas Curvilíneas**

Estas superficies intersectan al punto  $P$  de quien las coordenadas cartesianas son  $(y_1, y_2, y_3)$ . Las superficies son llamadas superficies coordenadas y sus intersecciones dos a la vez forman las líneas coordenadas o curvas  $X_1, X_2, X_3$ . Por tanto la línea de intersección de  $X_2 = C_2$  y  $X_3 = C_3$  es la línea coordenada  $X_1$ , esto es, una curva a lo largo de la cual solamente  $x_1$  varía. Los valores de  $x_1, x_2, x_3$  los cuales corresponden al punto  $P(y_1, y_2, y_3)$  son definidas como las coordenadas curvilíneas de  $P$ . Las ecuaciones  $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3)$ , etc., representan un sistema de coordenadas curvilíneas  $x_1, x_2, x_3$ .

Si las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

las superficies coordenadas son planos y sus intersecciones dos a la vez son líneas rectas paralelas a los ejes coordenados como se muestra en la Figura 2.2.

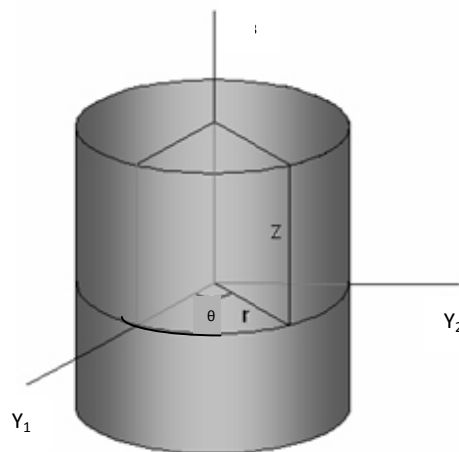


**Figura 2.2. Sistema Cartesiano Tridimensional.**

Si las ecuaciones son

$$\begin{aligned} y_1 &= r \cos \theta \\ y_2 &= r \sin \theta \\ y_3 &= z \end{aligned} \quad (2.5)$$

el sistema es reconocido como un sistema curvilíneo,  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  el cual es llamado *sistema coordenado cilíndrico* tal como es mostrado en la Figura 2.3



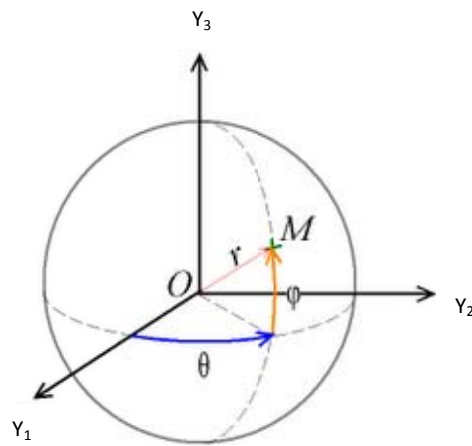
**Figura 2.3. Sistema de Coordenadas Cilíndricas.**



Un sistema que tiene las relaciones

$$\begin{aligned}y_1 &= r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\y_2 &= r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\y_3 &= r \cos \phi\end{aligned}\tag{2.6}$$

es el sistema curvilíneo conocido como el *sistema coordenado esférico*, el cual es mostrado en la Figura 2.4.



**Figura 2.4. Sistema de Coordenadas Esféricas.**

Considérese un sistema general curvilíneo de coordenadas  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Los ejes pueden ser representados por el símbolo  $Z_s$  donde  $s = 1, 2, 3$ . Se expresa estos valores en términos de un nuevo sistema de coordenadas  $X_r$ .

Las coordenadas  $x$  y las coordenadas  $z$  están relacionadas mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(z_1, z_2, z_3) \\x_2 &= x_2(z_1, z_2, z_3) \\x_3 &= x_3(z_1, z_2, z_3)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Las coordenadas  $x_1, x_2$ , y  $x_3$ , son mutuamente independientes.

Diferenciando (2.7) se obtienen las siguientes ecuaciones de transformación para los diferenciales de las coordenadas,

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial x_1}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial x_1}{\partial z_3} dz_3 \\
dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial x_2}{\partial z_3} dz_3 \\
dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial x_3}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z_3} dz_3
\end{aligned} \tag{2.8}$$

El Jacobiano para estas relaciones está definido como sigue

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \frac{\partial x_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial x_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial z_1} & \frac{\partial x_3}{\partial z_2} & \frac{\partial x_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial x_r}{\partial z_s} \right| \tag{2.9}$$

donde los rangos para  $r$  y  $s$  son 3.

El Jacobiano no desaparece, desde que se ha asumido independencia de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Las ecuaciones

$$x_r = x_r(z_1, z_2, z_3)$$

pueden ser invertidas para dar

$$z_s = z_s(x_1, x_2, x_3)$$

Tomando las derivadas de la expresión resulta en

$$dx_r = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial x_r}{\partial z_s} dz_s \quad (r=1,2,3) \tag{2.10}$$

Empleando la convención de sumación se obtiene

$$dx_r = \frac{\partial x_r}{\partial z_s} dz_s \tag{2.11}$$

El sufijo  $s$  implica la sumación y elimina la necesidad de escribir el símbolo de suma.

Considérese el sistema de coordenadas rectangulares  $Y_1, Y_2, Y_3$  y el sistema general curvilíneo  $Z_1, Z_2, Z_3$ , las coordenadas rectangulares  $(y_1, y_2, y_3)$  para

el punto  $P$  pueden ser expresadas como funciones de  $z_1, z_2, z_3$  en las coordenadas curvilíneas como sigue,

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(z_1, z_2, z_3) \\y_2 &= y_2(z_1, z_2, z_3) \\y_3 &= y_3(z_1, z_2, z_3)\end{aligned}$$

Resolviendo para  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en términos de  $y_1, y_2, y_3$  da

$$\begin{aligned}z_1 &= z_1(y_1, y_2, y_3) \\z_2 &= z_2(y_1, y_2, y_3) \\z_3 &= z_3(y_1, y_2, y_3)\end{aligned}$$

Estas funciones deben ser inyectivas y deben de tener derivadas continuas tal que exista una correspondencia única entre  $y_1, y_2, y_3$  y  $z_1, z_2, z_3$ .

El vector posición  $\mathbf{r}$  para el punto  $P$  en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{r} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k} \quad (2.12)$$

Esto también puede ser expresado como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(z_1, z_2, z_3)$$

Expresado en términos de coordenadas curvilíneas, un vector tangente unitario a la curva  $Z_1$  en  $P$  está dado por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial z_1}{|\partial \mathbf{r} / \partial z_1|} \quad (2.13)$$

Sea  $h_1$  que representa  $|\partial \mathbf{r} / \partial z_1|$ ; entonces

$$h_1 \mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_1} \quad (2.14)$$

Donde el término  $h_1$  es llamado *factor de escala*. De una manera similar los valores para  $h_2 \mathbf{e}_2$  y  $h_3 \mathbf{e}_3$  pueden ser obtenidos. Esos vectores unitarios son orientados para estar en la dirección de incremento de los valores  $z_1, z_2$  y  $z_3$ .

La relación

$$\nabla z_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \mathbf{i} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \mathbf{j} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \mathbf{k} \quad (2.15)$$

Representa un vector en  $P$  normal a la superficie  $z_1 = c_1$ . Un vector unitario en la misma dirección es

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\nabla z_1}{|\nabla z_1|} \quad (2.16)$$

De una manera similar los vectores unitarios  $\mathbf{E}_2$  y  $\mathbf{E}_3$  pueden ser escritos. En cada punto  $P$  hay dos conjuntos de vectores unitarios, uno tangente a las curvas coordenadas y el otro normal a las superficies coordenadas. Esos dos conjuntos de vectores unitarios son idénticos si el sistema de coordenadas curvilíneas es ortogonal.

El vector  $\mathbf{r}$  puede ser representado en términos de vectores bases unitarios  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  o  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  como sigue

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 = R_1 \mathbf{E}_1 + R_2 \mathbf{E}_2 + R_3 \mathbf{E}_3$$

Aquí  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  y  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  son las respectivas componentes en cada sistema.

El vector  $\mathbf{r}$  puede también estar referido a los vectores base

$$\partial \mathbf{r} / \partial z_1, \partial \mathbf{r} / \partial z_2, \partial \mathbf{r} / \partial z_3 \text{ o } \nabla z_1, \nabla z_2, \nabla z_3$$

Estos, en general, no son vectores unitarios. Se puede escribir la expresión para  $\mathbf{r}$  como

$$\mathbf{r} = C^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_1} + C^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_2} + C^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_3} \quad (2.17)$$

Donde las componentes  $C^1$ ,  $C^2$ ,  $C^3$  son las componentes contravariantes. También

$$\mathbf{r} = C_1 \nabla z_1 + C_2 \nabla z_2 + C_3 \nabla z_3 \quad (2.18)$$

Aquí  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  son las componentes covariantes.

La relación  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z_1, z_2, z_3)$  puede expresarse como

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_2} dz_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_3} dz_3 \quad (2.19)$$

Pero  $\partial \mathbf{r} / \partial z_1 = h_1 \mathbf{e}_1$ , etc.; por tanto

$$d\mathbf{r} = h_1 dz_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dz_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dz_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.20)$$

El diferencial de longitud de arco es

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.21)$$

y para un sistema ortogonal  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ . Por tanto

$$ds^2 = (h_1 dz_1)^2 + (h_2 dz_2)^2 + (h_3 dz_3)^2 \quad (2.22)$$

#### 4. VECTORES Y TENSORES

Sean las  $x^i$  que representan las coordenadas de un punto  $M$  en el espacio, y  $x^i + dx^i$  las coordenadas de un punto  $N$ . La cantidad infinitesimal  $dx^i$  es el desplazamiento de  $M$  a  $N$ . El vector desplazamiento  $MN$  se llama un vector contravariante infinitesimal. Las componentes son  $dx^i$ .

Las componentes del vector desplazamiento en un nuevo conjunto de coordenadas  $x'^i$  pueden ser encontradas a partir de la ecuación de transformación utilizando la regla de la cadena del cálculo

$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i$$

La siguiente relación de transformación es utilizada para definir un vector contravariante

$$A^{r'} = \frac{\partial z'^r}{\partial z^s} A^s \quad (2.23)$$

En términos generales, un vector contravariante es definido de acuerdo a las transformaciones de la relación (2.23).

La ecuación de transformación (2.23) puede ser escrita en forma matricial. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial z^1} & \frac{\partial z^1}{\partial z^2} & \frac{\partial z^1}{\partial z^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial z^1} & \frac{\partial z^2}{\partial z^2} & \frac{\partial z^2}{\partial z^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial z^1} & \frac{\partial z^3}{\partial z^2} & \frac{\partial z^3}{\partial z^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

#### 4.1 TENSORES CONTRAVARIANTES

Sean  $B^i$  y  $C^j$  que representan dos vectores contravariantes. El producto  $B^i C^j$  puede ser representado por una matriz  $n \times n$  de quien los elementos se denotan por  $A^{ij}$ , esto es,

$$A^{ij} = B^i C^j$$

En otro sistema coordenado (prima) los elementos de la matriz son

$$A'^{ij} = B'^i C'^j$$

Sin embargo, puede ser sustituido para  $B'^i$  y  $C'^j$  la ecuación de transformación (2.23) como se desarrolló antes; así

$$A'^{ij} = \left( \frac{\partial z'^i}{\partial z^k} B^k \right) \left( \frac{\partial z'^j}{\partial z^l} C^l \right)$$

Pero  $B^k C^l$  es igual a  $A^{kl}$ , por tanto

$$A'^{ij} = \left( \frac{\partial z'^i}{\partial z^k} \frac{\partial z'^j}{\partial z^l} A^{kl} \right) \quad (2.24)$$

Esta es la ecuación que define un vector contravariante de segundo orden; esto es, un conjunto de cantidades  $A^{rs}$  es un tensor contravariante de segundo orden si se transforma de acuerdo a la relación (2.24).

Tensores contravariantes de orden superior están definidos de una manera similar.

Un vector contravariante es un tensor contravariante de primer orden.

La ecuación de transformación (2.24) para  $i, j, k$  cada uno igual a 1, 2, y 3 en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} A'^{11} & A'^{12} & A'^{13} \\ A'^{21} & A'^{22} & A'^{23} \\ A'^{31} & A'^{32} & A'^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^1}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^1}{\partial z'^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^2}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^2}{\partial z'^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^3}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^3}{\partial z'^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^1}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^1}{\partial z'^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^2}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^2}{\partial z'^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial z'^1} & \frac{\partial z^3}{\partial z'^2} & \frac{\partial z^3}{\partial z'^3} \end{bmatrix}$$

## 4.2 UN INVARIANTE

Un tensor de orden cero es aquel que no se altera por el cambio de las coordenadas. La ecuación de transformación en este caso puede ser expresado como

$$A' = A \quad (2.25)$$

A causa de que el tensor de orden cero no es afectado por el cambio de coordenadas, este es llamado un invariante, o escalar.

## 4.3 VECTORES COVARIANTES

Un vector covariante está definido como aquel de quien sus componentes se transforman de acuerdo a la relación

$$A'_r = \frac{\partial z^s}{\partial z'^r} A_s \quad (2.26)$$

Cabe señalar que el superíndice se utiliza para indicar vectores contravariantes y tensores, y el subíndice para indicar vectores covariantes y tensores.

## 4.4 TENSORES COVARIANTES

De manera muy similar los tensores covariantes de segundo orden son aquellos que se transforman de acuerdo a la relación

$$A'_{rs} = \frac{\partial z^t}{\partial z'^r} \frac{\partial z^u}{\partial z'^s} A_{tu} \quad (2.27)$$

Un vector covariante es un tensor covariante de orden uno.

Expresiones similares para la transformación de un conjunto de coordenadas a otro puede ser escrito para tensores covariantes de orden superior.

#### 4.5 TENSORES MEZCLADOS

Si un conjunto de cantidades tales como  $A_{st}^r$  se transforma de acuerdo a la relación

$$A_{st}^{'r} = \frac{\partial z^{'r}}{\partial z^u} \frac{\partial z^u}{\partial z^{'s}} \frac{\partial z^w}{\partial z^t} A_{vw}^u \quad (2.28)$$

Estas se definen como un tensor mezclado.

Este tensor mezclado en particular es de tercer orden, teniendo un índice contravariante y dos índices covariantes. El orden de un tensor es determinado por el número de índices libres.

#### 4.6 EL CARÁCTER TENSORIAL DEL DELTA DE KRONECKER

El delta de Kronecker  $\delta_s^r$  puede ser transformado de acuerdo a la relación

$$A_s^{'r} = \frac{\partial z^{'r}}{\partial z^t} \frac{\partial z^u}{\partial z^{'s}} \delta_u^t \quad (2.29)$$

De esta relación el carácter tensorial de las delta de Kronecker se ve igual como la que se indica por sus índices, nombrándola, una contravariante y una covariante.

De (2.29) se observa que

$$\frac{\partial z^u}{\partial z^{'s}} \delta_u^t$$

Es distinto de cero cuando  $t = u$ ; en otro caso  $\delta_u^t$  es cero. Por tanto

$$\frac{\partial z^u}{\partial z^{'s}} \delta_u^t = \frac{\partial z^t}{\partial z^{'s}}$$

Sustituyendo en (2.29) da



$$\delta_s^{r'} = \frac{\partial z^{r'}}{\partial z^s} \frac{\partial z^s}{\partial z^{r'}} = \frac{\partial z^{r'}}{\partial z^{r'}} \quad (2.30)$$

La cual es conocida por la delta de Kronecker.

#### 4.7 MULTIPLICACIÓN EXTERNA DE TENSORES

El producto externo de dos tensores es definido como el conjunto de cantidades obtenidas por multiplicación de cada componente del primer tensor por cada componente del segundo tensor.

Antes de desarrollar la multiplicación externa de tensores es imperativo cambiar los índices símbolos tal que no haya índices repetidos en el mismo nivel.

En un espacio tridimensional el producto externo de  $A_t^r$  y  $B_{uv}^s$  es un conjunto de 243 cantidades expresadas como

$$C_{tuv}^{rs} = A_t^r B_{uv}^s$$

En la multiplicación externa cada sufijo particular debe de ser mantenido al mismo nivel en ambos lados de la relación. El carácter tensorial del producto externo está determinado por la posición y número de sufijos.

$C_{tuv}^{rs}$  está clasificado como un tensor mezclado de quinto orden.

#### 4.8 CONTRACCIÓN

Supóngase que se está tratando con un tensor mezclado teniendo rango contravariante  $s$  y rango covariante  $r$ . Contracción es la operación donde un índice contravariante y covariante son igualados y la suma es tomada con respecto a ese índice. El tensor mezclado resultante es de rango contravariante  $s-1$  y rango covariante  $r-1$ .

Considérese el tensor mezclado  $B_{jkl}^i$ . La ecuación de transformación de este tensor entre dos sistemas de coordenadas curvilíneas  $z^i$  y  $z'^i$  es

$$B_{jkl}^i = \frac{\partial z'^i}{\partial z^\alpha} \frac{\partial z^\beta}{\partial z'^j} \frac{\partial z^\gamma}{\partial z'^k} \frac{\partial z^\delta}{\partial z'^l} B_{\beta\gamma\delta}^\alpha$$

Los términos  $B_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$  son las componentes de  $B_{jkl}^i$  en el sistema no prima.

Los índices  $i$  y  $k$  son igualados y la suma obtenida.

$$B_{jil}^i = \frac{\partial z^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial z^{\beta}}{\partial z'^j} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial z'^i} \frac{\partial z^{\delta}}{\partial z'^l} B_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$$

También

$$\frac{\partial z^i}{\partial z^{\alpha}} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial z'^i} = \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial z^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

Sustituyendo da

$$B_{jil}^i = \frac{\partial z^{\beta}}{\partial z'^j} \frac{\partial z^{\delta}}{\partial z'^l} \delta_{\alpha}^{\gamma} B_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$$

Esta es la forma de la ecuación de transformación para un tensor de segundo orden; por tanto se eliminan los índices repetidos

$$B_{jl}^i = \frac{\partial z^{\beta}}{\partial z'^j} \frac{\partial z^{\delta}}{\partial z'^l} B_{\beta\delta}^i$$

Se concluye entonces que cuando  $B_{jil}^i$  es contraído el resultado es un tensor de segundo orden  $B_{jl}^i$  o

$$B_{jil}^i = B_{jl}^i$$

Un tensor tal como  $A_{jkl}^i$  puede ser contraído de tres maneras distintas para producir  $A_{akl}^{\alpha}$ ,  $A_{jcl}^{\alpha}$  y  $A_{jk\alpha}^{\alpha}$ . La contracción de  $A_j^i$ , produce un escalar.

#### 4.9 MULTIPLICACIÓN INTERNA DE TENSORES

Cuando la operación de contracción es aplicada a un producto externo, el resultado es llamado el producto interno.

Para obtener el producto interno de dos tensores, el primer paso es formar el producto externo. Una contracción es desarrollada igualando un índice contravariante en un tensor a un índice covariante del otro tensor y entonces se suma.

El producto interno de dos tensores  $A_s^u$  y  $B_{rt}$  es considerado.

La multiplicación exterior da

$$C_{srt}^u = A_s^u B_{rt}$$

Una de las dos posibles contracciones es obtenida igualando los índices  $u$  con  $r$  y sumando:

$$C_{st} = C_{srt}^r = A_s^r B_{rt}$$

En resumen, el proceso de multiplicar tensores, o multiplicación exterior, y la contracción es llamada multiplicación interna y el resultado final es el producto interno.

Se considera el producto externo de dos vectores  $A^p$  y  $B_q$ . Desde que estos vectores son tensores, deben transformarse como sigue

$$A'^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} A^p \text{ y } B'_k = \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} B_q$$

Por tanto

$$A'^j B'_k = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} A^p B_q$$

Contrayendo, esto es, haciendo  $j = k$  y sumando, da

$$A'^j B'_j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} A^p B_q = \delta_p^q A^p B_q = A^p B_p$$

Esto muestra que  $A^p B_p$  es un invariante o escalar. El término  $A^p B_p$ , siendo un escalar, es llamado el producto escalar o punto de los dos vectores.

#### 4.10 PRUEBAS DEL CARÁCTER TENSORIAL

El carácter tensorial de cantidades de dos índices puede ser establecido de la siguiente manera: Si el símbolo  $A^{pq}$  representa un conjunto de nueve cantidades tales que  $A^{pq} x_q$  es un vector contravariante donde  $x_q$

es un vector covariante arbitrario, entonces  $A^{pq}$  es un tensor contravariante de segundo orden. Desde que  $A^{pq} x_q$  es un vector contravariante, este se transforma como sigue

$$A'^{rs} x'_s = \frac{\partial z'^r}{\partial z^p} A^{pq} x_q$$

De la misma manera,  $x_q$  debe de transformarse de acuerdo a la ecuación

$$x_q = \frac{\partial z'^t}{\partial z^q} x'_t$$

Sustituyendo para  $x_q$  da

$$A'^{rs} x'_s = \frac{\partial z'^r}{\partial z^p} \frac{\partial z'^t}{\partial z^q} A^{pq} x'_t$$

Cambiando los índices dummy  $s$  a  $t$  y rearreglando los resultados se obtiene

$$\left( A'^{rt} - \frac{\partial z'^r}{\partial z^p} \frac{\partial z'^t}{\partial z^q} A^{pq} \right) x'_t = 0$$

Desde que  $x_q$  es arbitrario, esto es  $x'_t$ ; por tanto los términos entre paréntesis deben desaparecer o

$$A'^{rt} = \frac{\partial z'^r}{\partial z^p} \frac{\partial z'^t}{\partial z^q} A^{pq}$$

Esta es la ecuación de transformación para un tensor contravariante de segundo orden; por tanto  $A^{pq}$  debe ser un tensor contravariante de segundo orden.

Una segunda prueba se da en la siguiente proposición: “Si la cantidad  $A_{rs} x^r y^s$  representa un invariante donde  $x^r$  y  $y^s$  son vectores contravariantes arbitrarios,  $A_{rs}$  es un tensor covariante de segundo orden”. Para esto se nota que, desde que  $A_{rs} x^r y^s$  es un invariante, la siguiente relación existe

$$A'_{ij} x^i y^j = A_{rs} x^r y^s$$

Las relaciones de transformación para los vectores  $x^r$  y  $y^s$  son

$$x^r = \frac{\partial z^r}{\partial z'^i} x^i$$

$$y^s = \frac{\partial z^s}{\partial z'^j} y^j$$

Sustituyendo da

$$A'_{ij} x^i y^j = A_{rs} \frac{\partial z^r}{\partial z'^i} \frac{\partial z^s}{\partial z'^j} x^i y^j$$

y rearreglando se obtiene

$$\left( A'_{ij} - \frac{\partial z^r}{\partial z'^i} \frac{\partial z^s}{\partial z'^j} A_{rs} \right) x^i y^j = 0$$

Desde que,  $x^r$ ,  $x'^s$ ,  $y^i$ ,  $y'^j$  son vectores arbitrarios, los términos entre paréntesis desaparecen y

$$A'_{ij} = \frac{\partial z^r}{\partial z'^i} \frac{\partial z^s}{\partial z'^j} A_{rs}$$

Esta es la ecuación de transformación para un tensor covariante de segundo orden; así queda establecido el carácter tensorial de  $A_{rs}$ .

#### 4.11 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS TENSORES

Lo importante en los tensores son las ecuaciones tensoriales, si es válido para un sistema coordinado, también lo es en otros sistemas. Así las ecuaciones tensoriales son verdaderas en todos los sistemas coordinados.

Considérese la transformación

$$A'_{rs} = \frac{\partial z^t}{\partial z'^r} \frac{\partial z^u}{\partial z'^s} A_{tu}$$

Si  $A_{tu}$  es cero, entonces  $A'_{rs}$  es también cero en cualquier otro sistema coordenado.

Se tiene dos cantidades  $A_{ij}$  y  $B_{ij}$  que son iguales. ¿Estas son iguales si se transforman a otro sistema coordenado?

Se parte del hecho que  $A_{ij} = B_{ij}$  y

$$A'_{ij} = \frac{\partial z^t}{\partial z'^i} \frac{\partial z^u}{\partial z'^j} A_{tu}$$

$$B'_{ij} = \frac{\partial z^t}{\partial z'^i} \frac{\partial z^u}{\partial z'^j} B_{tu}$$

Restando ambas se obtiene

$$A'_{ij} - B'_{ij} = \left( \frac{\partial z^t}{\partial z'^i} \frac{\partial z^u}{\partial z'^j} \right) (A_{tu} - B_{tu}) = 0$$

Por tanto

$$A'_{ij} = B'_{ij}$$

Se discute ahora la propiedad transitiva de los tensores. Se asume un conjunto de cantidades  $A_{rs}$  que son transformadas a un nuevo sistema coordenado  $A'_{rs}$ , y de nuevo a otro sistema  $A''_{rs}$ . ¿La transferencia directa de  $A_{rs}$  a  $A''_{rs}$  es una transformación tensorial?

Ahora

$$A'_{rs} = \frac{\partial z^t}{\partial z'^r} \frac{\partial z^u}{\partial z'^s} A_{tu}$$

$$A''_{rs} = \frac{\partial z^t}{\partial z''^r} \frac{\partial z^u}{\partial z''^s} A'_{tu}$$

y reescribiendo  $A'_{rs}$  como  $A'_{tu}$  da

$$A'_{tu} = \frac{\partial z^m}{\partial z'^t} \frac{\partial z^n}{\partial z'^u} A_{mn}$$

Sustituyendo este término en  $A_{rs}''$  se obtiene

$$A_{rs}'' = \frac{\partial z'^t}{\partial z''^r} \frac{\partial z'^u}{\partial z''^s} \frac{\partial z^m}{\partial z'^t} \frac{\partial z^n}{\partial z'^u} A_m$$

El cual se reduce a

$$A_{rs}'' = \frac{\partial z^m}{\partial z''^r} \frac{\partial z^n}{\partial z''^s} A_{mn}$$

Este es un tensor de transformación de segundo orden.

Una relación transitiva tensorial es la que tiene la propiedad: si  $A_t^{rs}$  conlleva una relación a  $A_t'^{rs}$  y  $A_t'^{rs}$  conlleva a la misma relación a  $A_t''^{rs}$ ,  $A_t^{rs}$  conlleva una relación a  $A_t''^{rs}$ .

#### 4.12 SUMA Y RESTA DE TENSORES

Considérese los tensores  $A_{st}^r$  y  $B_{st}^r$  del mismo tipo y rango. Las ecuaciones de transformación son

$$A_{vw}^u = \frac{\partial z'^u}{\partial z^r} \frac{\partial z^s}{\partial z'^v} \frac{\partial z^t}{\partial z'^w} A_{st}^r$$

y

$$B_{vw}^u = \frac{\partial z'^u}{\partial z^r} \frac{\partial z^s}{\partial z'^v} \frac{\partial z^t}{\partial z'^w} B_{st}^r$$

Sumando o restando estas ecuaciones producen

$$(A_{vw}^u \pm B_{vw}^u) = \left( \frac{\partial z'^u}{\partial z^r} \frac{\partial z^s}{\partial z'^v} \frac{\partial z^t}{\partial z'^w} \right) (A_{st}^r \pm B_{st}^r)$$

Esta es la ecuación de transformación para tensores de tercer orden; por tanto

$$A_{st}^r \pm B_{st}^r = C_{st}^r$$

y

$$A_{vw}^u \pm B_{vw}^u = C_{vw}^u$$

Por tanto la suma o diferencia de dos tensores los cuales son del mismo rango y tipo es un tensor del mismo rango y tipo como los tensores originales.

## 5. EL TENSOR MÉTRICO

### 5.1 EL TENSOR MÉTRICO O FUNDAMENTAL

La Figura 2.5 representa una porción de espacio referida a las coordenadas cartesianas rectangulares cuyos ejes son  $X^1$ ,  $X^2$ ,  $X^3$ . La distancia entre los puntos  $P$  y  $Q$  es  $ds$ . Para encontrar  $ds$  se necesita solamente obtener la raíz cuadrada de las sumas de los cuadrados de  $dx^1$ ,  $dx^2$ ,  $dx^3$ . Así

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dx^r dx^r = \sum_{r=1}^3 (dx^r)^2 \quad (2.31)$$

Sea  $Z^1$ ,  $Z^2$ ,  $Z^3$  otro conjunto de ejes coordenados curvilíneos tales que

$$x^1 = f^1(z^1, z^2, z^3); \quad x^2 = f^2(z^1, z^2, z^3); \quad x^3 = f^3(z^1, z^2, z^3)$$

o, en general,

$$x^r = f^r(z^1, z^2, z^3)$$

De acuerdo a la ecuación de transformación general

$$dx^r = \frac{\partial f^r}{\partial z^s} dz^s$$

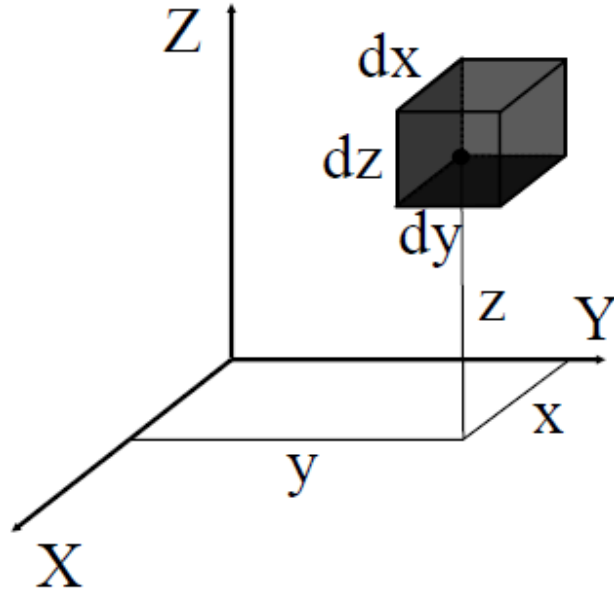
Desde que  $(ds)^2 = dx^r dx^r$  y cambiando los índices dummy para evitar confusión se puede escribir lo siguiente

$$(ds)^2 = \left( \frac{\partial f^r}{\partial z^i} dz^i \right) \left( \frac{\partial f^r}{\partial z^j} dz^j \right) = \left( \frac{\partial f^r}{\partial z^i} \frac{\partial f^r}{\partial z^j} \right) dz^i dz^j$$

Esto representa una forma cuadrática homogénea en la variable  $dz^i$ . Ahora se hace



$$b_{(ij)} = \frac{\partial f^r}{\partial z^i} \frac{\partial f^r}{\partial z^j} \text{ donde } \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$$



**Figura 2.5. Distancia entre Dos Puntos en el Sistema Cartesiano**

Entonces

$$(ds)^2 = b_{(ij)} dz^i dz^j \quad (2.32)$$

Los paréntesis son introducidos para indicar que esta vez los  $b_{(ij)}$  no han sido establecidos como un tensor.

Los términos  $b_{(ij)}$  para  $n = 3$  son

$$\begin{bmatrix} b_{(11)} & b_{(12)} & b_{(13)} \\ b_{(21)} & b_{(22)} & b_{(23)} \\ b_{(31)} & b_{(32)} & b_{(33)} \end{bmatrix}$$

La ecuación cuadrática (2.32), en su forma expandida es

$$\begin{aligned}
(ds)^2 = & b_{(11)} dz^1 dz^1 + b_{(12)} dz^1 dz^2 + b_{(13)} dz^1 dz^3 \\
& + b_{(21)} dz^2 dz^1 + b_{(22)} dz^2 dz^2 + b_{(23)} dz^2 dz^3 \\
& + b_{(31)} dz^3 dz^1 + b_{(32)} dz^3 dz^2 + b_{(33)} dz^3 dz^3
\end{aligned}$$

Lo que arreglando da

$$\begin{aligned}
(ds)^2 = & b_{(11)} (dz^1)^2 + b_{(22)} (dz^2)^2 + b_{(33)} (dz^3)^2 \\
& + (b_{(12)} + b_{(21)}) dz^1 dz^2 + (b_{(13)} + b_{(31)}) dz^1 dz^3 \\
& + (b_{(23)} + b_{(32)}) dz^2 dz^3
\end{aligned}$$

En la forma general, la ecuación cuadrática puede ser expresada como

$$(ds)^2 = \left( \frac{b_{(ij)} + b_{(ji)}}{2} \right) dz^i dz^j \quad (2.33)$$

Con el objeto de simplificar la ecuación se tiene  $g_{(ij)}$  que representa el término que está entre paréntesis al lado derecho de la ecuación (2.33); esto es

$$g_{(ij)} = \frac{b_{(ij)} + b_{(ji)}}{2} \quad (2.34)$$

Por tanto

$$(ds)^2 = g_{(ij)} dz^i dz^j$$

Los términos  $g_{(ij)}$  para  $n = 3$  son

$$[g_{(ij)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_{(11)} + b_{(11)} & b_{(12)} + b_{(21)} & b_{(13)} + b_{(31)} \\ b_{(21)} + b_{(12)} & b_{(22)} + b_{(22)} & b_{(23)} + b_{(32)} \\ b_{(31)} + b_{(13)} & b_{(32)} + b_{(23)} & b_{(33)} + b_{(33)} \end{bmatrix}$$

Intercambiando los subíndices  $i$  y  $j$  en la ecuación (2.34), se verifica la siguiente igualdad

$$g_{(ij)} = g_{(ji)}$$

Desde que  $dz^i$  es un vector contravariante arbitrario y  $ds$  es un invariante, se puede concluir que  $g_{(ij)}$  es un tensor  $g_{ij}$ . Este tensor covariante de

segundo orden,  $g_{ij}$ , es llamado el *tensor fundamental o métrico*. Los términos  $g_{(ij)}$  son las componentes simétricas del tensor  $b_{(ij)}$ . La parte no simétrica de  $b_{ij}$  no contribuye a la suma,  $b_{ij} dz^i dz^j$ . Consecuentemente la forma general para  $ds$  en términos del tensor métrico es

$$(ds)^2 = g_{ij} dz^i dz^j \quad (2.35)$$

## 5.2 LOS VECTORES BASE $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$

Varios aspectos del sistema de coordenadas rectangulares  $X^i$  y el sistema de coordenadas curvilíneas  $Z^i$  se consideran. Los vectores unitarios,  $\mathbf{i}_j$  son vectores base asociados con las coordenadas cartesianas  $X^i$ .

Las ecuaciones de transformación son representadas como

$$z^i = z^i(x^1, x^2, x^3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Las ecuaciones inversas son

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$$

Sea  $M(x^1, x^2, x^3)$  un punto en el espacio referido a los ejes cartesianos  $X^i$ , de quien el vector posición,  $\mathbf{r}$ , es expresado como

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 = x^j \mathbf{i}_j$$

La expresión para el elemento de arco  $ds$  es

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= dx^i dx^i = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

La siguiente expresión puede ser escrita para  $d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^1} dz^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^3} dz^3 = \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} dz^i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} dz^i
\end{aligned} \tag{2.37}$$

El término  $\partial \mathbf{r} / \partial z^1$  implica que durante la diferenciación los valores para  $z^2$  y  $z^3$  son fijados tomando ambos como constantes. Bajo esta condición  $\mathbf{r}$  es solamente una función de  $z^1$ . Los términos de  $\mathbf{r}$  pueden solamente moverse a lo largo de la línea coordenada  $z^1$  en el sistema  $z^i = z^i(x^1, x^2, x^3)$ ; por tanto el término  $\partial \mathbf{r} / \partial z^1$  es tangente a la línea coordenada  $z^1$ . La ecuación tangente es

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^1} = \lim_{\Delta z^1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta z^1}$$

A partir de un análisis similar,  $\partial \mathbf{r} / \partial z^2$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial z^3$  son tangentes a las líneas coordenadas  $z^2$  y  $z^3$ , respectivamente. Estos vectores tangentes son designados por el símbolo  $\mathbf{g}_i$ . En términos generales los vectores  $\mathbf{g}_i$  son

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} \tag{2.38}$$

Cuando se emplea  $\mathbf{r} = x^j \mathbf{i}_j$ , se obtiene la relación entre los vectores base  $\mathbf{i}$ 's y  $\mathbf{g}$ 's; esto es,

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \mathbf{i}_j \tag{2.39}$$

y substituyendo en la ecuación (2.37) da

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} dz^i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i dz^i = \mathbf{g}_i dz^i \tag{2.40}$$

Sustituyendo la ecuación (2.40) en la ecuación (2.36) da

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i dz^i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i dz^i \right)$$

Rearreglando y reemplazando el índice  $i$  en el término del extremo derecho por  $j$ , se obtiene

$$(ds)^2 = \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j dz^i dz^j \right)$$

Sea

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij} \quad (2.41)$$

Desde que

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_i, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (2.42)$$

y los términos  $g_{ij}$  son simétricos, la expresión para el cuadrado de la longitud de arco,  $ds$ , es

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dz^i dz^j = g_{ij} dz^i dz^j \quad (2.43)$$

Comparando (2.43) y (2.35), se ve que los  $g_{ij}$ 's son los mismos. Por tanto la ecuación (2.41) da una interpretación geométrica del tensor métrico previamente definido en términos del producto punto de los vectores base  $\mathbf{g}_i$ .

Los valores de  $dx_k$  en términos del sistema coordenado  $Z^j$  pueden ser escritos

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial z^1} dz^1 + \frac{\partial x_k}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial x_k}{\partial z^3} dz^3 = \frac{\partial x_k}{\partial z^j} dz^j \quad (2.44)$$

Insertando esta relación en la ecuación (2.31) da

$$(ds)^2 = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} dz^i \frac{\partial x^k}{\partial z^j} dz^j = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} dz^i dz^j \quad (2.45)$$

Las ecuaciones (2.43) y (2.45) implican que

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} \quad (2.46)$$

Para  $k = 1, 2, 3$  se obtiene

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i} \frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \frac{\partial x^2}{\partial z^i} \frac{\partial x^2}{\partial z^j} + \frac{\partial x^3}{\partial z^i} \frac{\partial x^3}{\partial z^j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Cuando  $i = j$ ,

$$g_{ii} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} = \left( \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \right)^2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{No sumación sobre } i \\ \text{Sumación sobre } k \end{array} \right) \quad (2.47)$$

y utilizando la delta de Kronecker, la ecuación (2.46) puede ser escrita como

$$g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^n}{\partial z^j} \delta_{mn} \quad (2.48)$$

Si y sólo si  $m = n$ , será  $\delta_{mn} = 1$ .

Un sistema curvilíneo se dice que es ortogonal si los vectores tangentes a cada punto forman una triada de vectores mutuamente perpendiculares.

Para un sistema ortogonal la relación para  $(ds)^2$  se reduce a

$$(ds)^2 = g_{11} (dz^1)^2 + g_{22} (dz^2)^2 + g_{33} (dz^3)^2 \quad (2.49)$$

Otra notación común utiliza el símbolo  $h$ , donde

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2$$

De acuerdo a esta nomenclatura la siguiente ecuación puede ser escrita por  $(ds)^2$

$$(ds)^2 = (h_1 dz^1)^2 + (h_2 dz^2)^2 + (h_3 dz^3)^2 \quad (2.50)$$

# CAPÍTULO III

## SISTEMAS COORDENADOS Y GEODÉSICAS

### 1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de los conjuntos y las funciones es fundamental el sistema que se utilice para representar los puntos. Comúnmente al tener datos multidimensionales, se utiliza el sistema de representación cartesiana mediante pares de números, en el caso del plano, o mediante ternas en el caso del espacio, que se identifica con un sistema de coordenadas ortogonal.

Sin embargo esta no es la única forma posible de identificar los puntos. Hay otras formas de representación que para este trabajo resulta más útil.

En este capítulo se tratan los sistemas de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas así como la geodésica que se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie, que servirá como una distancia.

Cabe señalar, que debido a que los textos consultados, solo mencionan la forma de las geodésicas sin demostrarlo y si hay alguna demostración, está hecha desde el punto de vista variacional utilizando funcionales y no desde el punto de vista de la geometría diferencial. El autor de este trabajo, planteó las ecuaciones diferenciales y las resolvió obteniéndose como resultado las geodésicas requeridas como se detalla en las secciones 5, 6 y 7 del presente capítulo.

### 2. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Observando la Figura 2.5, el cuadrado de la longitud de arco se puede expresar por la relación

$$(ds)^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 = \sum_{r=1}^3 (dz^r)^2$$

Consecuentemente

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

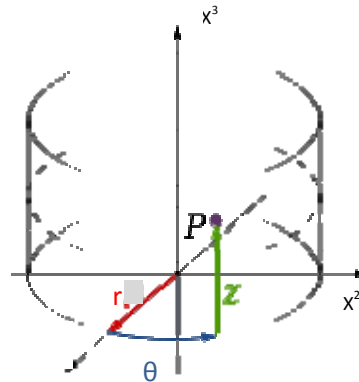
Ahora se considera el sistema de coordenadas cilíndricas mostrado en la Figura 3.1. Las coordenadas cartesianas  $x^1, x^2, x^3$  están relacionadas a las coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$  por las ecuaciones

$$x^1 = r \cos \theta = z^1 \cos z^2$$

$$x^2 = r \sin \theta = z^1 \sin z^2$$

$$x^3 = z = z^3$$

Es conveniente reemplazar los símbolos utilizados para coordenadas cilíndricas,  $r, \theta, z$  por otros tales como  $z^1, z^2, z^3$ .



**Figura 3.1. Sistema de Coordenadas Cilíndricas**

Empleando la relación general (2.46) para  $g_{ij}$  se obtiene

$$g_{ij} = \frac{\partial r \cos \theta}{\partial z^i} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial z^j} + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial z^i} \frac{\partial r \sin \theta}{\partial z^j} + \frac{\partial z}{\partial z^i} \frac{\partial z}{\partial z^j}$$

Si  $i = 1 = j$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} \frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 0 = 1 \end{aligned}$$



Si  $i = 2 = j$

$$g_{22} = \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 0 = r^2$$

Si  $i = 3 = j$

$$g_{33} = \frac{\partial r \cos \theta}{\partial z} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial z} + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial z} \frac{\partial r \sin \theta}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1$$

Si  $i = 1$  y  $j = 2$

$$g_{12} = \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= -\cos \theta r \sin \theta + \sin \theta r \cos \theta + 0 = 0$$

Todos los otros valores son también cero; por tanto

$$g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{32} = g_{23} = 0$$

Empleando la ecuación fundamental para  $(ds)^2$  da

$$(ds)^2 = g_{ij} dz^i dz^j$$

o

$$(ds)^2 = g_{11} dz^1 dz^1 + g_{22} dz^2 dz^2 + g_{33} dz^3 dz^3 + 0 + 0 + \dots$$

Sustituyendo da

$$(ds)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (dz)^2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1$$

Un procedimiento alternativo consiste en emplear los vectores unitarios  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$ , y  $\mathbf{i}_3$ , donde la relación general entre los vectores base  $\mathbf{g}_i$  y  $\mathbf{i}_j$  es

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \mathbf{i}_j$$

Para  $i = 1$ ,

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial x^j}{\partial z^1} \mathbf{i}_j$$

Sumando sobre  $j$  da

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial z^1} \mathbf{i}_3 \\ &= \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z^3}{\partial r} \mathbf{i}_3 \\ &= \cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2 + 0 \end{aligned}$$

Para  $i = 2$  y  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z^3}{\partial \theta} \mathbf{i}_3 \\ &= -r \sin \theta \mathbf{i}_1 + r \cos \theta \mathbf{i}_2 + 0 \end{aligned}$$

Para  $i = 3$  y  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial r \cos \theta}{\partial z^3} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial r \sin \theta}{\partial z^3} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z^3}{\partial z^3} \mathbf{i}_3 \\ &= 0 + 0 + \mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \\ g_{11} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ g_{12} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = -r \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cos \theta = 0 \\ g_{22} &= \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \\ g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1 \end{aligned}$$

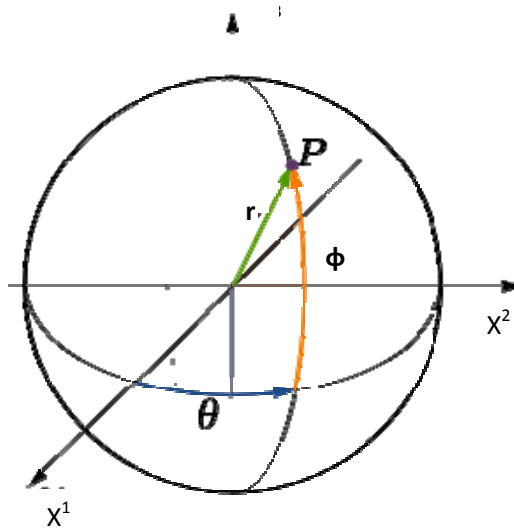
En resumen, para coordenadas cilíndricas

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

#### 4. SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Considérese el sistema de coordenadas esféricas mostrado en la Figura 3.2. Las ecuaciones generales que relacionan los dos sistemas coordenados son

$$\begin{aligned}x^1 &= r \cos \phi \cos \theta = z^1 \cos z^2 \cos z^3 \\x^2 &= r \cos \phi \operatorname{sen} \theta = z^1 \cos z^2 \operatorname{sen} z^3 \\x^3 &= r \operatorname{sen} \phi = z^1 \operatorname{sen} z^2\end{aligned}$$



**Figura 3.2. Sistema de Coordenadas Esféricas**

La expresión general, ecuación (2.46), para  $g_{ij}$  es

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i} \frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \frac{\partial x^2}{\partial z^i} \frac{\partial x^2}{\partial z^j} + \frac{\partial x^3}{\partial z^i} \frac{\partial x^3}{\partial z^j}$$

Sea  $i = j = 1$ ; entonces

$$\begin{aligned}g_{11} &= (\cos \phi \cos \theta)^2 + (\cos \phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (\operatorname{sen} \phi)^2 \\&= \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \phi \\&= \cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \operatorname{sen}^2 \phi = 1\end{aligned}$$

Sea  $i = 2, j = 2$ ; entonces

$$\begin{aligned}
g_{22} &= (-r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 + (-r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \phi)^2 \\
&= r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \\
&= r^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + r^2 \cos^2 \phi = r^2
\end{aligned}$$

Sea  $i = 3$ ,  $j = 3$ ; entonces

$$\begin{aligned}
g_{33} &= (-r \cos \phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \phi \cos \theta)^2 \\
&= r^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \\
&= r^2 \cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r^2 \cos^2 \phi
\end{aligned}$$

De manera similar los otros valores para  $g_{ij}$  involucra el uso de los vectores unitarios  $\mathbf{i}_j$ . La relación básica para  $\mathbf{g}_i$  es

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z^i} = \frac{\partial (x^j \mathbf{i}_j)}{\partial z^i} = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \mathbf{i}_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

Sea  $i = 1$ ; entonces

$$\mathbf{g}_1 = \cos \phi \cos \theta \mathbf{i}_1 + \cos \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}_2 + \operatorname{sen} \phi \mathbf{i}_3$$

Sea  $i = 2$ ; entonces

$$\mathbf{g}_2 = -r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \mathbf{i}_1 - r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}_2 + r \cos \phi \mathbf{i}_3$$

Sea  $i = 3$ ; entonces

$$\mathbf{g}_3 = -r \cos \phi \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}_1 + r \cos \phi \cos \theta \mathbf{i}_2 + 0$$

Ahora

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \phi = 1 \\
g_{22} &= \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \\
&= r^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + r^2 \cos^2 \phi = r^2 \\
g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = r^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta = r^2 \cos^2 \phi \\
g_{12} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = -r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta - r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \theta + r \operatorname{sen} \phi \cos \phi \\
&= -r \operatorname{sen} \phi \cos \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + r \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 0
\end{aligned}$$

Todos los otros  $g_{ij}$  son cero.

Ahora

$$(ds)^2 = g_{11} dz^1 dz^1 + g_{22} dz^2 dz^2 + g_{33} dz^3 dz^3 + 0 + 0 + \dots$$

Sustituyendo se obtiene

$$(ds)^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \phi d\theta^2$$

Resumiendo para coordenadas esféricas

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2 \phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

## 5. GEODÉSICAS

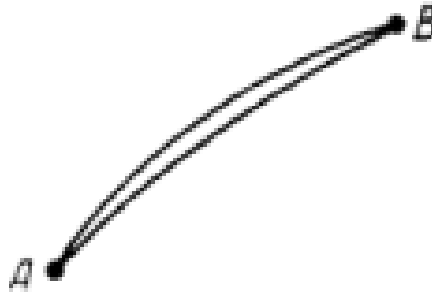
La ecuación general del elemento de línea  $(ds)^2$  para el espacio es la forma cuadrática

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^\beta \quad (3.4)$$

El término  $g_{\alpha\beta}$  representa las componentes del tensor métrico. Esta forma diferencial cuadrática es conocida como la métrica Riemanniana. Cualquier espacio para el cual  $g_{\alpha\beta}$  es definido positivo es conocido como un espacio Riemanniano.

El estudio de los tensores está dirigido a encontrar curvas de longitud mínima uniendo dos puntos sobre una superficie dada en el espacio. Curvas de este tipo son llamadas geodésicas. Sobre una superficie esférica una geodésica entre dos puntos es una porción de un círculo máximo. Sobre una superficie plana la geodésica entre dos puntos es una sección de línea recta. Relaciones desarrolladas las cuales están basadas en un espacio Riemanniano  $n$ -dimensional son importantes por las aplicaciones a la geometría de superficies y a las trayectorias dinámicas en el espacio.

Sean  $M$  y  $N$  dos puntos sobre una superficie  $S$  en un espacio bidimensional. La longitud de la curva  $M P_1 P_2 N$  está designado por  $L$ , y  $ds$  representa un elemento de la curva mostrada en la Figura 3.3.



**Figura 3.3. Elemento de Curva sobre una Superficie**

La longitud de la curva  $M P_1 P_2 N$  puede ser expresada en la forma de ecuación como

$$L = \int_M^N ds \quad (3.5)$$

La curva  $M P_1' P_2' N$  está infinitésimamente cercana a la curva  $M P_1 P_2 N$  y su longitud es  $L + \delta L$ . La curva  $M P_1 P_2 N$  será una geodésica si y sólo si

$$\delta L = \delta \int_M^N ds = 0 \quad (3.6)$$

Se puede concluir que la longitud de una línea geodésica debe ser un mínimo considerando que todas las curvas conectan los mismos dos puntos. La determinación de las líneas geodésicas es análoga a encontrar los máximos o mínimos de funciones algebraicas. Para las geodésicas el proceso es más complicado a causa de que es necesario encontrar el mínimo de las longitudes de arco en vez de considerar solamente puntos como en las funciones algebraicas.

Las distancias medidas a lo largo de la curva  $M P_1 P_2 N$  de  $M$  a  $P_1$  y  $P_2$  son  $s$  y  $s + ds$ , respectivamente. Las correspondientes distancias a lo largo de la curva  $M P_1' P_2' N$  son  $s'$  y  $s' + ds'$ . Es esencial tener en cuenta que los puntos  $P_1$  y  $P_1'$  y  $P_2$  y  $P_2'$  son infinitésimamente cercanos cada uno del otro. También se asume que la correspondencia entre  $ds$  y  $ds'$  es uno a uno. El símbolo  $\delta$  es un operador utilizado para denotar pequeñas diferencias entre las cantidades correspondientes para las líneas  $M P_1 P_2 N$  y  $M P_1' P_2' N$ .

El cambio en la longitud de arco,  $ds$  se representa como

$$\delta ds = ds' - ds = d(s' - s) = d \delta s \quad (3.7)$$

Las expresiones para el cuadrado de la longitud de arco son

$$\begin{aligned} \delta(ds)^2 &= (ds')^2 - (ds)^2 = (ds' + ds)(ds' - ds) \\ &= (\delta ds + ds + ds)(\delta ds + ds - ds) = (\delta ds + 2ds)(\delta ds) \\ &= (\delta ds)^2 + 2ds \delta ds = 2ds \delta ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

El resultado final desprecia la pequeña cantidad  $(\delta ds)^2$ . El operador  $\delta$  es ahora aplicado a la ecuación (2.43).

$$\delta(ds)^2 = \delta(g_{ij} dz^i dz^j)$$

En esta ecuación los coeficientes  $g_{ij}$  son, en general, funciones de las coordenadas  $z^1$  y  $z^2$ .

Llevando a cabo la operación da

$$2ds \delta ds = dz^i dz^j \delta g_{ij} + g_{ij} dz^i \delta dz^j + g_{ij} dz^j \delta dz^i \quad (3.9)$$

Desde que  $\delta g_{ij} = (\partial g_{ij} / \partial z^k) \delta z^k$  el primer término del lado derecho puede ser modificado como sigue

$$dz^i dz^j \delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} dz^i dz^j \delta z^k = \frac{\partial g_{ik}}{\partial z^j} dz^i dz^k \delta z^j$$

Sustituyendo este término en la ecuación (3.9) y dividiendo por  $2ds$  da

$$\delta ds = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial z^j} \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} \delta z^j + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dz^i}{ds} d \delta z^j + \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dz^j}{ds} d \delta z^i \quad (3.10)$$

Nótese que  $\delta dz^j = d \delta z^j$ .

En una forma general la ecuación (3.6) puede ser expresado como

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta \int ds = \int ds' - \int ds = \int (ds' - ds) \\ &= \int d(s' - s) = \int d\delta s = \int \delta ds\end{aligned}\quad (3.11)$$

Recuérdese que  $d\delta s = \delta ds$  de la ecuación (3.8).

Sustituyendo por  $\delta ds$  de la ecuación (3.10) en (3.11) da

$$\delta L = \int_M^N \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial z^j} \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} \delta z^j ds + \int_M^N \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dz^i}{ds} d\delta z^j + \int_M^N \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dz^j}{ds} d\delta z^i \quad (3.12)$$

Desde que una considerable manipulación es requerida en la solución de esta ecuación, los últimos dos términos del lado derecho se tratan en primer lugar. Esos términos se designan por el término  $T$ . Si los índices artificiales  $i$  y  $j$  son intercambiados en el término del extremo derecho, los dos términos son iguales, desde que  $g_{ij} = g_{ji}$ . Por tanto

$$T = \int_M^N g_{ij} \frac{dz^i}{ds} d\delta z^j$$

Integrando por partes

$$T = \left( g_{ij} \frac{dz^i}{ds} \delta z^j \right)_M^N - \int_M^N d \left( g_{ij} \frac{dz^i}{ds} \right) \delta z^j$$

El primer término del lado derecho de la ecuación debe de desaparecer, ya que en  $M$  y  $N$  los términos  $\delta z^j$  desaparecen. La integral se puede dividir en dos partes como sigue

$$T = - \int_M^N g_{ij} \frac{d^2 z^i}{ds^2} \delta z^j ds - \int_M^N dg_{ij} \frac{dz^i}{ds} \delta z^j$$

La expresión en la integral del extremo derecho puede ser representado por

$$dg_{ij} \frac{dz^i}{ds} \delta z^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} dz^k \frac{dz^i}{ds} \delta z^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial z^i} dz^i \frac{dz^k}{ds} \delta z^j \right)$$



La equivalencia de esas dos expresiones puede ser establecido intercambiando los índices artificiales  $i$  y  $k$  en el término del lado derecho. La expresión puede ser rearmada como

$$dg_{ij} \frac{dz^i}{ds} \delta z^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial z^i} \right) \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} \delta z^j ds$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación para  $T$  y entonces sustituyendo  $T$  en la ecuación (3.11) da

$$\delta L = - \int_M^N \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial z^j} \right) \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} + g_{ij} \frac{d^2 z^i}{ds^2} \right\} \delta z^j ds$$

Los tres términos de derivadas parciales son reemplazados por los siguientes símbolos

$$[ik, j] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial z^j} \right) \quad (3.13)$$

Esta relación es simétrica en la medida que  $i$  y  $k$  sean referidos. Los símbolos  $[ik, j]$  son llamados *símbolos de Christoffel de primera especie*.

La ecuación para  $\delta L$  llega a ser

$$\delta L = - \int_M^N \left( [ik, j] \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} + g_{ij} \frac{d^2 z^i}{ds^2} \right) \delta z^j ds \quad (3.14)$$

De acuerdo a la ecuación (3.6) la curva es una geodésica si  $\delta L$  desaparece. A causa de la naturaleza arbitraria de los  $\delta z$ 's, los términos en los corchetes deben ser cero; por tanto

$$g_{ij} \frac{d^2 z^i}{ds^2} + [ik, j] \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (3.15)$$

Ya que se trata de un espacio bidimensional, la ecuación (3.15) representa las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden ( $j=1,2$ ). Una suma alrededor de  $i$  es necesaria en el primer término y una alrededor de  $i$  y  $k$  en el segundo término.

Multiplicando la ecuación (3.15) por  $g^{ij}$  y sumando sobre  $j$  da

$$g_{ij} g^{lj} \frac{d^2 z^i}{ds^2} + g^{lj} [ik, j] \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (3.16)$$

Sea

$$g^{lj} [ik, j] = \Gamma_{ik}^l$$

Entonces se sigue que

$$[ik, j] = g_{lj} \Gamma_{ik}^l \quad (3.17)$$

Estos símbolos son llamados los *símbolos de Christoffel de segunda especie* y son simétricos en  $i$  y  $k$ .

Utilizando el símbolo de Christoffel de la segunda especie, la ecuación (3.17) puede ser escrita como

$$\frac{d^2 z^l}{ds^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2) \quad (3.18)$$

Aunque la discusión se ha limitado a un espacio bidimensional, las ecuaciones pueden ser extendidas a un espacio  $n$ -dimensional. Por tanto

$$\frac{d^2 z^l}{ds^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Esta expresión representa  $n$  ecuaciones diferenciales, las cuales cuando son integradas dan las ecuaciones paramétricas para la línea geodésica.

Así se han obtenido las ecuaciones de la línea geodésica en las siguientes formas

$$g_{ij} \frac{d^2 z^i}{ds^2} + [ik, j] \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (3.19)$$

y

$$\frac{d^2 z^l}{ds^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dz^i}{ds} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad (3.20)$$

## 6. SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL EN SISTEMAS COORDENADOS

### 6.1 SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS

Las coordenadas cartesianas  $x^1, x^2, x^3$  están relacionadas a las coordenadas cilíndricas  $r, \theta$  y  $z$  por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta = z^1 \cos z^2, \quad r = z^1 \\ x^2 &= r \sin \theta = z^1 \sin z^2, \quad \theta = z^2 \\ x^3 &= z = z^3, \quad z = z^3 \end{aligned}$$

Los valores para  $g_{ij}$  obtenidos de (3.1) son  $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = 1$ , y todos los otros son cero.

Los símbolos de Christoffel de primera especie que tienen valores distintos de cero son:

$$\begin{aligned} [22,1] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0 - 2r] = -r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [21,2] &= [12,2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial z^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [2r + 0 - 0] = r \end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie que tienen valores distintos de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = g^{2j} [21, j] = g^{21} [21,1] + g^{22} [21,2] + g^{23} [21,3] \\ &= 0 + \frac{1}{r^2} r + 0 = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= g^{1j} [22, j] = g^{11} [22, 1] + g^{12} [22, 2] + g^{13} [22, 3] \\ &= \frac{1}{1}(-r) + 0 + 0 = -r\end{aligned}$$

## 6.2 SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL PARA COORDENADAS ESFÉRICAS

Las coordenadas cartesianas  $x^1, x^2, x^3$  están relacionadas a las coordenadas esféricas  $r, \phi$  y  $\theta$  por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x^1 &= r \cos \phi \cos \theta = z^1 \cos z^2 \cos z^3, \quad r = z^1 \\ x^2 &= r \cos \phi \sin \theta = z^1 \cos z^2 \sin z^3, \quad \phi = z^2 \\ x^3 &= r \sin \phi = z^1 \sin z^2, \quad \theta = z^3\end{aligned}$$

Los valores para  $g_{ij}$  obtenidos de (3.3) son  $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \cos^2 \phi$ , y todos los otros son cero.

Los símbolos de Christoffel de primera especie que tienen valores distintos de cero son

$$\begin{aligned}[22, 1] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0 - 2r] = -r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[33, 2] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{32}}{\partial z^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial z^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0 - r^2 (2)(-\cos \phi)(\sin \phi)] \\ &= r^2 \cos \phi \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[23, 3] &= [32, 3] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{23}}{\partial z^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial z^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial z^3} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + r^2 (2)(\cos \phi)(-\sin \phi) - 0] \\ &= -r^2 \cos \phi \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[33,1] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{31}}{\partial z^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial z^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial z^1} \right] \\
&= \frac{1}{2} [0 + 0 - 2r \cos^2 \phi] = -r^2 \cos^2 \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[12,2] &= [21,2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial z^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial z^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} [0 + 2r + 0] = r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[31,3] &= [13,3] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{33}}{\partial z^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial z^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial z^3} \right] \\
&= \frac{1}{2} [2r \cos^2 \phi + 0 - 0] = r \cos^2 \phi
\end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie que tienen valores distintos de cero son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= g^{1j} [22, j] = g^{11} [22,1] + g^{12} [22,2] + g^{13} [22,3] \\
&= \frac{1}{1} (-r) + 0 + 0 = -r \\
\Gamma_{33}^2 &= g^{2j} [33, j] = g^{21} [33,1] + g^{22} [33,2] + g^{23} [33,3] \\
&= 0 + \frac{1}{r^2} (r^2 \cos \phi \sen \phi) = \cos \phi \sen \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = g^{3j} [21, j] = g^{31} [32,1] + g^{32} [32,2] + g^{33} [32,3] \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} (-r^2 \cos \phi \sen \phi) \\
&= -\frac{\sen \phi}{\cos \phi} = -\tg \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= g^{1j} [33, j] = g^{11} [33,1] + g^{12} [33,2] + g^{13} [33,3] \\
&= 1(-r \cos^2 \phi) = -r \cos^2 \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = g^{2j} [21, j] = g^{21} [21,1] + g^{22} [21,2] + g^{23} [21,3] \\
&= 0 + \frac{1}{r^2} r + 0 = \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 &= g^{3j} [31, j] = g^{31} [31, 1] + g^{32} [31, 2] + g^{33} [31, 3] \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} r \cos^2 \phi = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

## 7. OBTENCIÓN DE LAS GEODÉSICAS

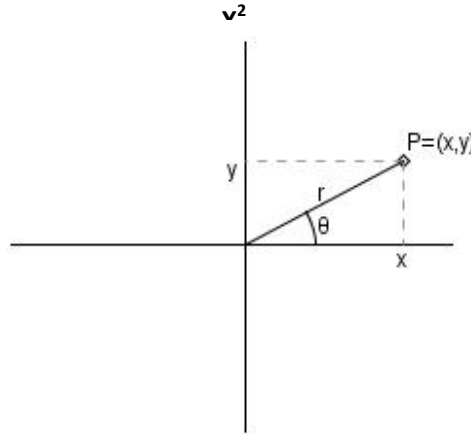
### 7.1 EN COORDENADAS POLARES

Las coordenadas polares es un caso particular de las coordenadas cilíndricas, cuando  $z = 0$ , por lo que la obtención de las geodésicas en este sistema coordenado, se obtienen a partir de lo desarrollado en la Sección 3 del Capítulo III.

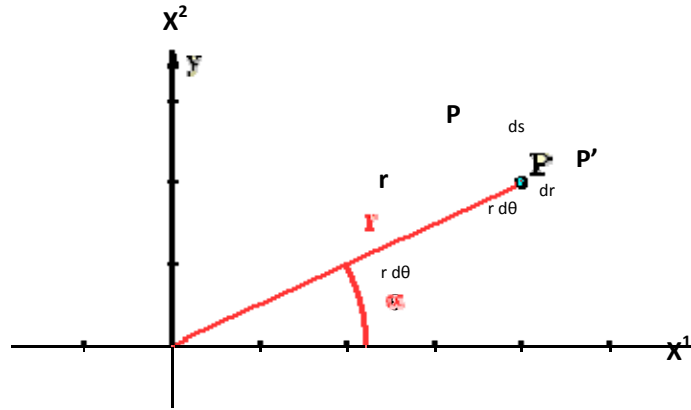
El punto  $P$  está representado sobre la superficie bidimensional como se muestra en la Figura 3.4. Para  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2$ .

Por tanto

$$(ds)^2 = g_{ij} dz^i dz^j = g_{11} dz^1 dz^1 + g_{22} dz^2 dz^2 + g_{12} dz^1 dz^2 + g_{21} dz^2 dz^1$$



**Figura 3.4. Representación de un Punto en Coordenadas Polares**



**Figura 3.5. Diferencial de Longitud en Coordenadas Polares**

Observando la Figura 3.5 el valor de  $(ds)^2$  puede ser expresado como

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

Comparando estas relaciones para  $ds$ , se ve que  $g_{11} = 1$ ,  $g_{22} = r^2$ ,  $g_{12} = 0$ , y  $g_{21} = 0$ . Por tanto

$$|g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2$$

Los símbolos de Christoffel de primera especie que tienen valores distintos de cero se obtienen utilizando la ecuación (3.15). En este caso  $z^1 = r$  y  $z^2 = \theta$ .

Sustituyendo da

$$\begin{aligned} [12, 2] &= [21, 2] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{12}}{\partial z^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 2r + 0] = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [22, 1] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial z^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial z^1} \right] \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0 - 2r] = -r \end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie son obtenidos por la ecuación (3.17).

Desde que se está trabajando con un sistema bidimensional, los  $i$ 's son sumados sobre 1 y 2.

$$\begin{aligned}\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = g^{2j} [21, j] &= g^{21} [21, 1] + g^{22} [21, 2] \\ &= 0 + \frac{1}{r^2} r = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 = g^{1j} [22, j] &= g^{11} [22, 1] + g^{12} [22, 2] \\ &= \frac{1}{1}(-r) + 0 = -r\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión (3.20) resulta en las siguientes ecuaciones, donde  $\dot{z}$  y  $\ddot{z}$  representa la segunda y primera derivada con respecto a  $s$ .

Para  $l = 1$ ,

$$\begin{aligned}\dot{z}^1 + \Gamma_{jk}^1 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \dot{z}^1 + \Gamma_{11}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{12}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{21}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^1 &= 0 \\ \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 &= 0\end{aligned}$$

Para  $l = 2$ ,

$$\begin{aligned}\dot{z}^2 + \Gamma_{jk}^2 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \dot{z}^2 + \Gamma_{11}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 &= 0 \\ \dot{z}^2 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 &= 0\end{aligned}$$

Así se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{z}^1 + \dot{z}^1 (\dot{z}^2)^2 = 0 \quad (3.21)$$

$$\dot{z}^2 + \frac{2}{\dot{z}^1} \dot{z}^1 \dot{z}^2 = 0 \quad (3.22)$$

o

$$r - r \dot{\theta}^2 = 0 \quad (3.23)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} = 0 \quad (3.24)$$



Multiplicando la ecuación (3.24) por  $r^2$  se obtiene

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} = 0$$

o

$$\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = 0$$

Resolviendo lo anterior produce

$$r^2 \dot{\theta} = \text{constante} = \alpha$$

Sea  $V = 1/r$ . Entonces

$$\dot{\theta} = \alpha V^2$$

Ahora

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{V} \right) = -V^{-2} \frac{dV}{d\theta} \alpha V^2 = -\alpha \frac{dV}{d\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{d}{ds} \left( -\alpha \frac{dV}{d\theta} \right) = -\alpha \frac{d^2 V}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\alpha^2 V^2 \frac{d^2 V}{d\theta^2}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (3.23) se obtiene

$$-\alpha^2 V^2 \frac{d^2 V}{d\theta^2} - \frac{1}{V} \alpha^2 V^4 = 0$$

o

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + V = 0$$

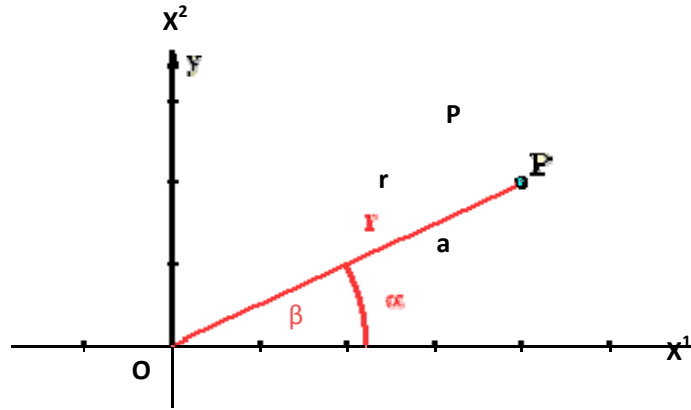
La solución de la ecuación es

$$V = a^{-1} \cos(\theta - \beta)$$

Donde  $a$  es la distancia perpendicular desde el origen a la línea y  $\beta$  es el ángulo entre  $a$  y el eje  $X^1$

$$r = a \sec(\theta - \beta)$$

Esta es la ecuación de una línea recta como la mostrada en Figura 3.6.



**Figura 3.6. Geodésica en un Sistema Coordenado Polar**

## 7.2 EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Sustituyendo en la expresión (3.20) resulta en las siguientes ecuaciones, donde  $\ddot{z}$  y  $\dot{z}$  representa la segunda y primera derivada con respecto a  $s$ .

Para  $l = 1$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{z}^1 + \Gamma_{jk}^1 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \ddot{z}^1 + \Gamma_{11}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{12}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{13}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{21}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{23}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{31}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{32}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^3 &= 0 \\ \ddot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando las variables originales se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$r(\theta)^2 = 0 \quad (3.25)$$

Para  $l = 2$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{z}^2 + \Gamma_{jk}^2 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \ddot{z}^2 + \Gamma_{11}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{13}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{23}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{31}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{32}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^3 &= 0 \\ \ddot{z}^2 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 &= 0 \end{aligned}$$

De las variables originales se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

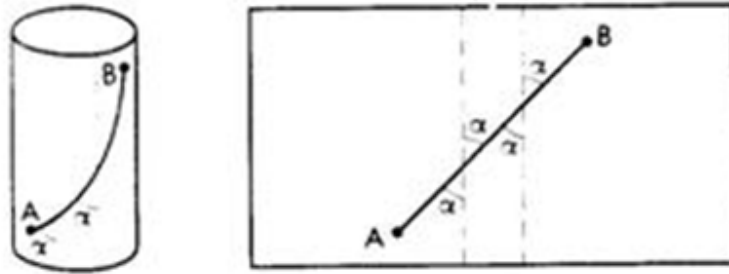
$$\ddot{\theta} = 0 \quad (3.26)$$

Por ser  $r$  constante se tiene que  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ .

De (3.25) y de (3.26) se sigue que

$$\theta = k_1$$

La geodésica es la curva generada por la intersección del plano que pasa por el origen que forma un ángulo de  $k_1$  radianes con el eje  $x^1$  y dos puntos de la superficie cilíndrica



**Figura 3.7. Geodésica en un Sistema Coordenado Cilíndrico**

### 7.3 EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Sustituyendo en la expresión (3.20) resulta en las siguientes ecuaciones, donde  $\ddot{z}$  y  $\dot{z}$  representa la segunda y primera derivada con respecto a  $s$ .

Para  $l = 1$ ,

$$\ddot{z}^1 + \Gamma_{jk}^1 \dot{z}^j \dot{z}^k = 0$$

$$\begin{aligned} &\ddot{z}^1 + \Gamma_{11}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{12}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{13}^1 \dot{z}^1 \dot{z}^3 \\ &\quad + \Gamma_{21}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{23}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^3 \\ &\quad + \Gamma_{31}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{32}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^3 = 0 \\ &\ddot{z}^1 + \Gamma_{22}^1 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^1 \dot{z}^3 \dot{z}^3 = 0 \end{aligned}$$

Utilizando las variables originales se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$-r(\dot{\phi})^2 - r \cos^2 \phi (\dot{\theta})^2 = 0 \quad (3.27)$$

Para  $l = 2$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{z}^2 + \Gamma_{jk}^2 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \ddot{z}^2 + \Gamma_{11}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{13}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{23}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{31}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{32}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^3 &= 0 \\ \ddot{z}^2 + \Gamma_{12}^2 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{21}^2 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{33}^2 \dot{z}^3 \dot{z}^3 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando las variables originales se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\phi} + \cos \phi \sin \phi (\dot{\theta})^2 = 0 \quad (3.28)$$

Para  $l = 3$ ,

$$\begin{aligned} \ddot{z}^3 + \Gamma_{jk}^3 \dot{z}^j \dot{z}^k &= 0 \\ \ddot{z}^3 + \Gamma_{11}^3 \dot{z}^1 \dot{z}^1 + \Gamma_{12}^3 \dot{z}^1 \dot{z}^2 + \Gamma_{13}^3 \dot{z}^1 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{21}^3 \dot{z}^2 \dot{z}^1 + \Gamma_{22}^3 \dot{z}^2 \dot{z}^2 + \Gamma_{23}^3 \dot{z}^2 \dot{z}^3 \\ + \Gamma_{31}^3 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{32}^3 \dot{z}^3 \dot{z}^2 + \Gamma_{33}^3 \dot{z}^3 \dot{z}^3 &= 0 \\ \ddot{z}^3 + \Gamma_{13}^3 \dot{z}^1 \dot{z}^3 + \Gamma_{31}^3 \dot{z}^3 \dot{z}^1 + \Gamma_{23}^3 \dot{z}^2 \dot{z}^3 + \Gamma_{32}^3 \dot{z}^3 \dot{z}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando las variables originales se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta} - 2 \tan \phi \dot{\phi} \dot{\theta} = 0 \quad (3.29)$$

Por ser  $r$  constante se tiene que  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ .

A partir de (3.27)

$$(\dot{\phi})^2 + \cos^2 \phi (\dot{\theta})^2 = 0$$

Como es la suma de dos términos elevados al cuadrado y esta suma es igual a cero, entonces cada término debe de ser igual a cero, obteniéndose:

$$\dot{\theta} = 0$$

De lo cual se obtiene que

$$\theta = k_1$$

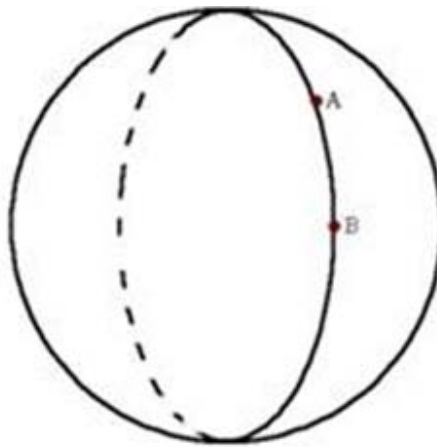
De (3.28)

$$\dot{\phi} = 0$$

$$\dot{\phi} = k_2$$

$$\phi = k_2 s + k_3$$

Como  $\theta = k_1$  es constante se tiene que la geodésica entre dos puntos de la esfera es la curva generada por el plano que pasa por estos dos puntos y el origen del sistema coordenado y la superficie esférica, como se muestra en la Figura 3.8.



**Figura 3.8. Geodésica en un Sistema Coordenado Esférico**

# **CAPÍTULO IV**

## **DESARROLLO DE LOS ALGORITMOS**

### **1. INTRODUCCIÓN**

La creciente capacidad de las computadoras otorga nuevas herramientas para apoyar el proceso de la toma de decisiones en diversas disciplinas y áreas de diseño así como en el manejo de la industria. La simulación es una de las herramientas más importantes y más interdisciplinarias. Las aplicaciones de la simulación parecen no tener límites. Actualmente se simulan los comportamientos hasta las partes más pequeñas de un mecanismo, el desarrollo de las epidemias, el sistema inmunológico humano, las plantas productivas, sucursales bancarias, el sistema de repartición de pizzas en una ciudad, crecimiento de poblaciones de especies de animales, partidos y torneos de fútbol, movimiento de los planetas y la evolución del universo, para mencionar unos pocos ejemplos de las aplicaciones de esta herramienta. En los países altamente desarrollados la simulación es una herramienta principal en los procesos de toma de decisiones, en el manejo de empresas y la planeación de la producción.

La "Projection Pursuit" se aplica en la detección de agrupamientos, o de conglomerados; aunque no toda estructura no lineal corresponde a agrupamientos. Esta proyección se identificada con un índice de proyección, que es una medida de distancia basada en la distribución normal.

En este capítulo se desarrollan los algoritmos que generan los datos provenientes de una distribución normal bivariada, también se propone un nuevo algoritmo de simulación de datos provenientes de una distribución normal multivariante utilizando el proceso inverso de la técnica de las Componentes Principales y se trata el algoritmo de búsqueda de la Projection Pursuit así como la evaluación de su índice de proyección respectivo.

La mayoría de los algoritmos presentados en el presente capítulo son propios del autor de este trabajo, por lo que el lector no tendrá otra fuente de información.

### **2. SIMULACIÓN DE VECTORES NORMALES BIVARIADOS**

Para simular estos datos bivariados generados por un vector aleatorio normal bivariado, se hace el siguiente cambio de variables en la expresión (1.1):

$$u = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

Con lo cual se obtiene:

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2 - 2\rho uv + v^2]} \quad (4.1)$$

y nuevamente haciendo la sustitución en (4.1):

$$w = \frac{u - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad dw = \frac{du}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Se obtiene

$$f(w, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad (4.2)$$

Tomando coordenadas polares

$$w = R \cos \theta, \quad v = R \sin \theta$$

Resulta

$$d = R^2 = w^2 + v^2 \quad \text{y} \quad \theta = \arctg\left(\frac{v}{w}\right)$$

Después de reemplazar en (4.2), se tiene:

$$f(d, \theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \quad 0 < d < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (4.3)$$

Esto es igual al producto de una densidad exponencial con media 2 y la densidad uniforme en  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , lo cual implica que:

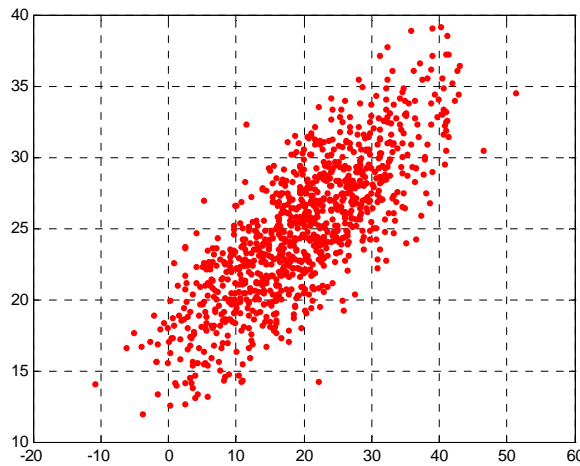
- $R^2$  y  $\theta$  son independientes
- $R^2$  es exponencial con media 2
- $\theta$  se distribuye uniformemente en  $\langle 0, 2\pi \rangle$

## ALGORITMO

El algoritmo anterior ya está desarrollado en algunos textos de simulación, pero el presentado a continuación es una extensión del anterior que es propiedad intelectual del autor del presente trabajo.

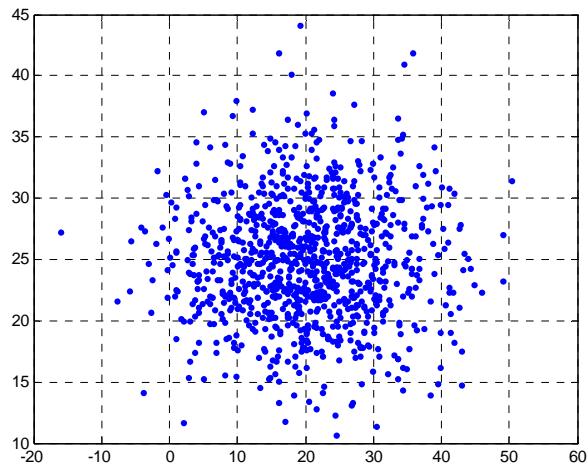
- a. Generar dos números aleatorios  $\theta \sim U\langle 0, 2\pi \rangle$  y  $d \sim \exp(1/2)$ .
- b. Hacer  $w = d^{1/2} \cos \theta$  y  $v = d^{1/2} \sin \theta$ .
- c. Hacer  $u = \sqrt{1 - \rho^2} (d^{1/2} \cos \theta) + \rho (d^{1/2} \sin \theta)$ .
- d. Hacer  $X_1 = \sigma_1 \left[ \sqrt{1 - \rho^2} (d^{1/2} \cos \theta) + \rho (d^{1/2} \sin \theta) \right] + \mu_1$  y  $X_2 = \sigma_2 [d^{1/2} \sin \theta] + \mu_2$ .

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran los datos obtenidos por simulación utilizando el algoritmo anterior para distintos coeficientes de correlación. Para esto se utiliza el Programa 2 (ver Anexo).

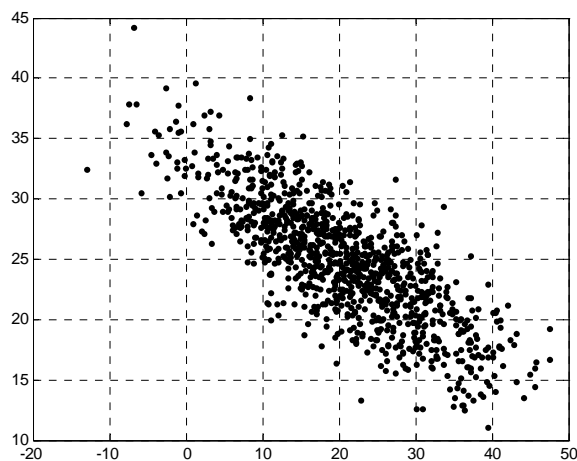


**Figura 4.1. Simulación de Vectores Bivariados con  $\rho = 0.8$**





**Figura 4.2. Simulación de Vectores Bivariados con  $\rho = 0$**



**Figura 4.3. Simulación de Vectores Bivariados con  $\rho = -0.8$**

### **3. SIMULACIÓN DE VECTORES NORMALES MULTIVARIADOS**

El presente algoritmo de simulación está inspirado en el proceso inverso de la técnica de las componentes principales que se mostró en la Sección 5 del Capítulo I.

Cabe señalar que el presente algoritmo fue inspiración del autor del presente trabajo, por lo que no se encontrará fuentes adicionales de información.

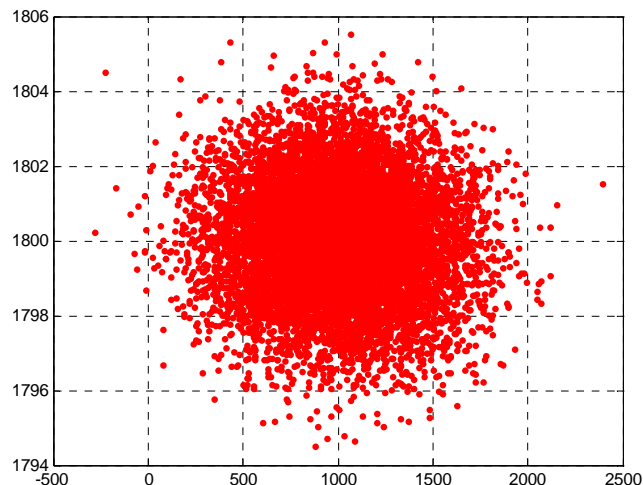
Para simular vectores provenientes de una distribución normal multivariada, se utiliza la transformación de Karhunen-Loève dada en (1.3).

Se parte del hecho que todos los softwares simulan conjuntos de datos univariados no correlacionados entre sí, entonces se inicia desde el resultado de (1.3) y se retorna a un conjunto de datos que están correlacionados. En términos simples, es el proceso inverso de la transformación de Karhunen-Loève dada en (1.3).

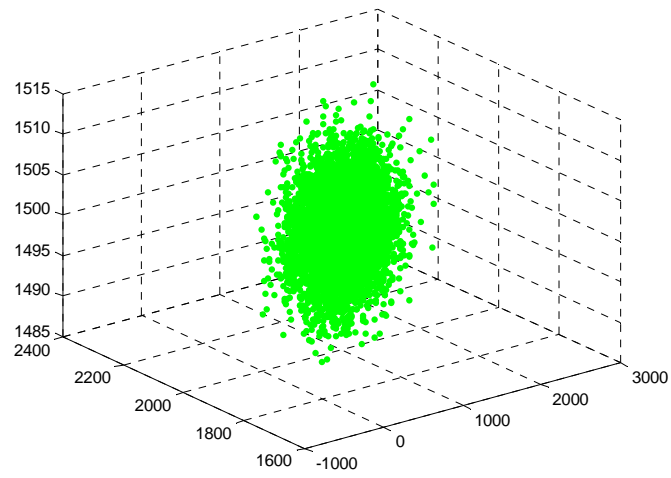
### ALGORITMO

- a. Ingresar la matriz de covarianza  $\Sigma_{p \times p}$  de donde se quiere simular.
- b. Se construye la matriz  $L$ , donde cada columna está formada por los autovectores de  $\Sigma$ .
- c. Se construye la matriz diagonal  $D$ , donde la diagonal está conformada por los autovalores de  $\Sigma$ .
- d. Se construye la matriz  $Y_{n \times p}$ , donde cada columna está formada por un conjunto de datos de tamaño  $n$  obtenido de una distribución normal univariada con varianza correspondiente a cada uno de los autovalores de  $\Sigma$ . Estas columnas son no correlacionadas.
- e. Se obtiene la matriz  $Z = YL'$ , que es la matriz de datos simulada, donde su matriz de covarianza es aproximadamente  $\Sigma$ .

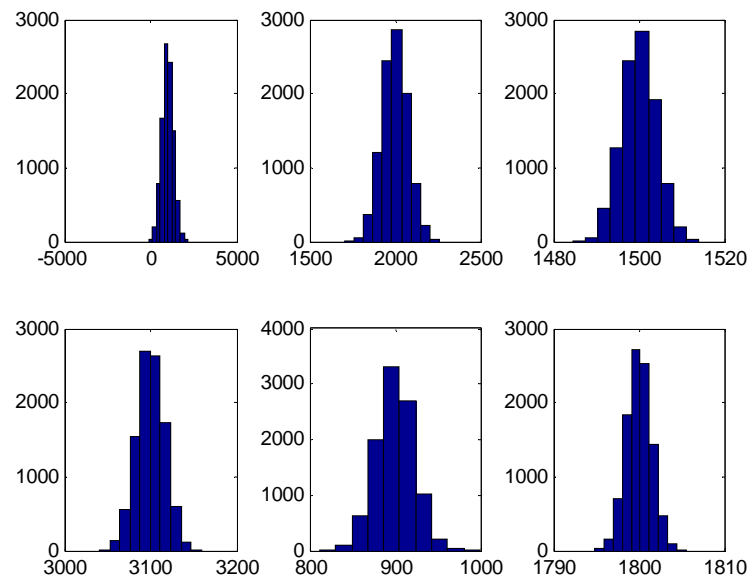
Las siguientes figuras muestran los resultados al ejecutar el Programa 3 del Anexo.



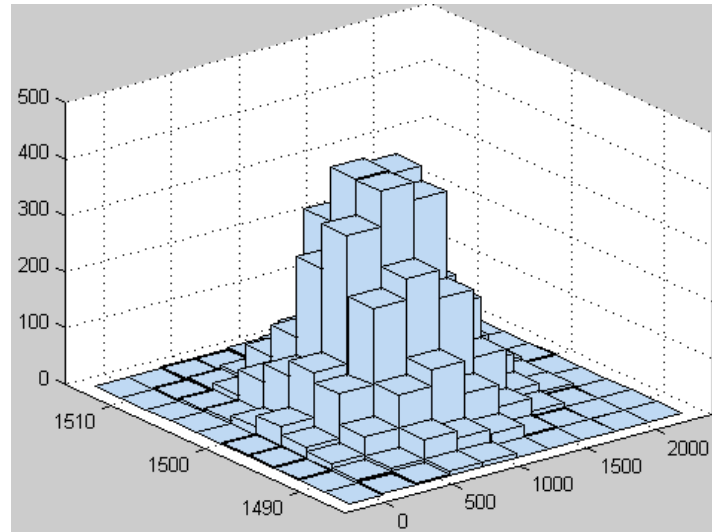
**Figura 4.4. Diagrama de Dispersión Bidimensional de Dos Componentes de los Vectores Simulados**



**Figura 4.5. Diagrama de Dispersión Tridimensional de Tres Componentes de los Vectores Simulados**



**Figura 4.6. Histogramas Univariados de las Seis Componentes de los Vectores Simulados**



**Figura 4.7. Histograma 3D de Dos Componentes de los Vectores Simulados**

#### 4. BÚSQUEDA DE LA PROJECTION PURSUIT

La Projection Pursuit se realiza a través de la proyección de las variables en diferentes planos para encontrar la de mayor interés según el Índice de Proyección Chi cuadrado [5]. El diagrama del proceso simplificado es mostrado en la Figura 4.8.

##### ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL ÍNDICE DE PROYECCIÓN

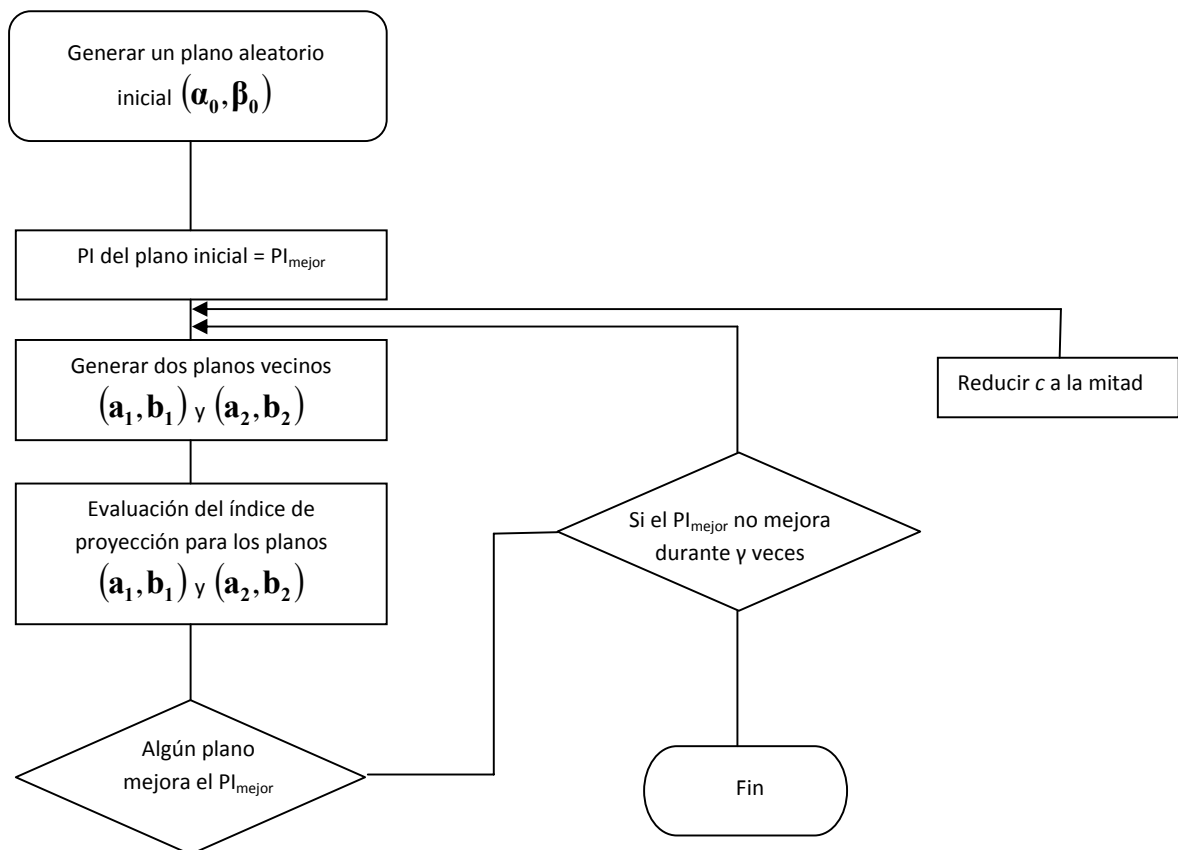
- a. Se esferizan los datos usando la siguiente transformación

$$\mathbf{Z}_i = \Lambda^{-1/2} \mathbf{Q}'(\mathbf{X}_i - \bar{\boldsymbol{\mu}})$$

donde las columnas de  $\mathbf{Q}$  son los autovectores de  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ,  $\Lambda$  es una matriz diagonal que corresponde a los autovalores de  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ , y  $\mathbf{X}_i$  es la  $i$ -ésima observación.

- b. Se propone un plano inicial aleatorio,  $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$ . Este es el plano más actual  $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ .
- c. Evaluar el índice de proyección  $PI_{\chi^2}(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0)$  para el plano inicial.
- d. Generar dos planos candidatos  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$  y  $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$  de acuerdo a la ecuación (1.8).

- e. Evaluar el índice de proyección de esos planos  $PI_{\chi^2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$  y  $PI_{\chi^2}(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ .
- f. Si uno de los planos candidatos índice de produce un valor más alto del índice de proyección, entonces ese plano se convierte en el mejor plano actual  $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ .
- g. Se repiten los pasos del (d) al (f) mientras hayan mejoras en el índice de proyección.
- h. Si el índice no mejora en  $\gamma$  iteraciones, entonces decrece el valor de  $c$  a la mitad.
- i. Se repiten los pasos (d) al (h) hasta que  $c$  sea un número tan pequeño como lo haya elegido el interesado.



**Figura 4.8. Diagrama del Proceso de Búsqueda del Índice de Proyección**

# CAPÍTULO V

## DISEÑO DEL SOFTWARE Y RESULTADOS

### 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe los pasos para la construcción de los códigos fuente. Adicionalmente, se aplica todo lo desarrollado en los capítulos anteriores a datos simulados así como a la base de datos real “crabs”. Se muestran los resultados visuales y numéricos generados por los softwares contruidos en MATLAB.

### 2. VISUALIZACIÓN EN COORDENADAS POLARES

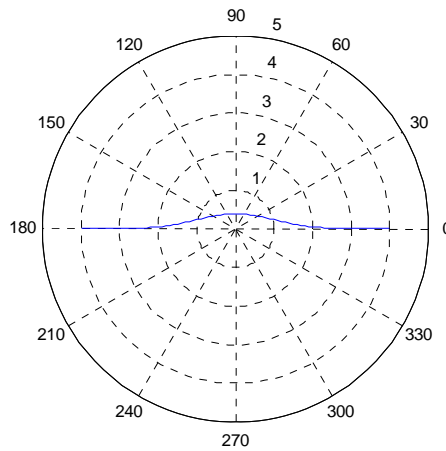
#### 2.1 GRÁFICO EN COORDENADAS POLARES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para obtener las transformaciones en esta sección, se utiliza lo desarrollado en la Sección 3 del Capítulo III, ya que la transformación en coordenadas polares es un caso particular de las coordenadas cilíndricas.

El proceso comienza transformando los pares  $(x, f(x))$  donde

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$  en coordenadas polares reemplazando en

las dos primeras ecuaciones de la expresión (2.5). Para esto se utiliza la sentencia **cart2pol** del MATLAB. Al ejecutar el Programa 6 (Ver Anexo) se obtuvo la Figura 5.1.

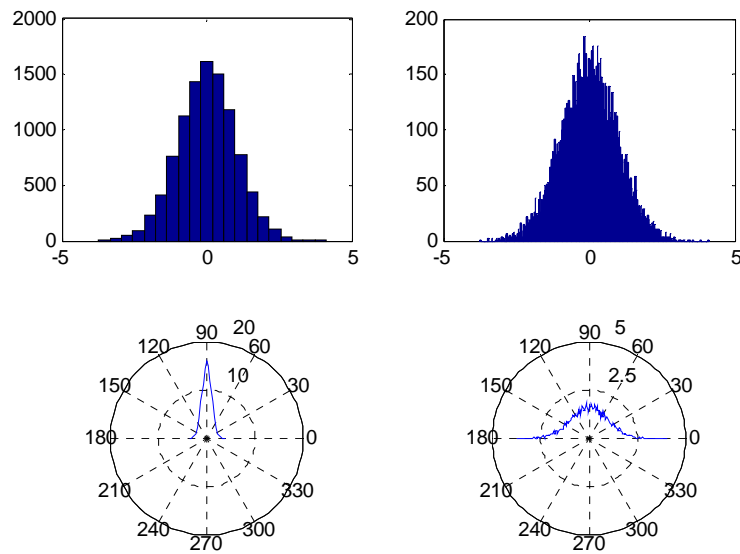


**Figura 5.1. Diagrama en Coordenadas Polares de la Función de Densidad Normal Estándar.**

## 2.2 HISTOGRAMA CLÁSICO TRANSFORMADO EN COORDENADAS POLARES

Para visualizar este histograma transformado, se ha simulado 10000 datos univariados provenientes de una distribución normal estándar. Para el mismo conjunto de datos simulados, se ha construido dos histogramas clásicos, el primero con 20 clases y el segundo con 200 clases. La sentencia **hist** del MATLAB, tiene la opción de manipular el número de clases, además de almacenar las frecuencias así como las marcas de clase en vectores.

Al ejecutar el Programa 7 del Anexo que está basado en la Sección 3 del Capítulo III del presente trabajo, se obtiene como resultado la Figura 5.2, que muestra los histogramas clásicos y sus correspondientes transformaciones en coordenadas polares.



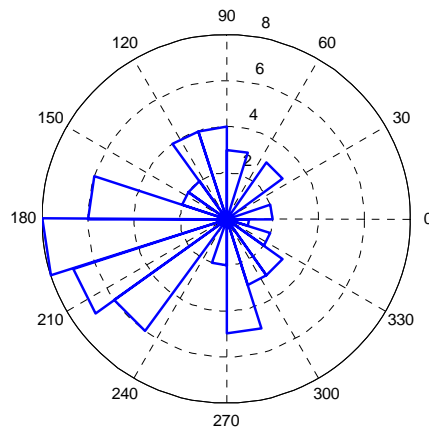
**Figura 5.2. Diagrama de un Histograma Clásico con su Correspondiente Transformación en Coordenadas Polares**

## 2.3 DIAGRAMA DE ROSA

El Diagrama de Rosa consta de cuñas con una longitud proporcional al número de datos, que abarca los ángulos que representan a las clases. La sentencia **rose** del MATLAB, crea un diagrama polar que muestra la distribución de los valores agrupados de acuerdo a su rango numérico. La longitud de cada cuña refleja el número de elementos que caen dentro de un grupo.

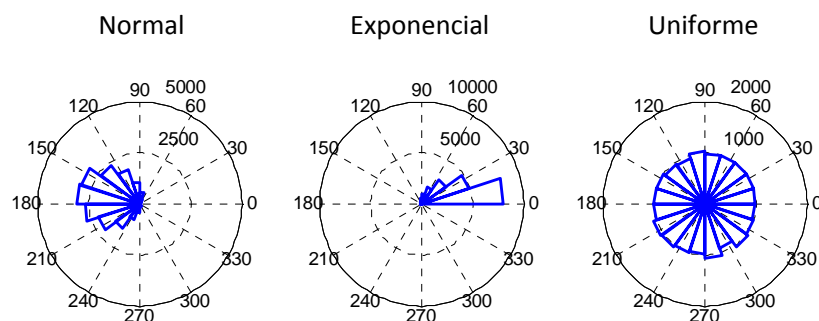
Para mostrar este histograma circular o Diagrama de Rosa, se utiliza los datos anuales de la acumulación de nieve en Buffalo (Buffalo Snowfall Data), New York desde 1910 a 1973. Al ejecutar el Programa 8 del Anexo, también basado en la Sección 3 del Capítulo III, se obtiene el Diagrama de Rosa que se muestra en la Figura 5.3.





**Figura 5.3. Diagrama de Rosa para los Datos de Buffalo Snowfall**

A continuación se muestra los Diagramas de Rosa para tres simulaciones distintas. La primera simulación se ha obtenido a partir de una distribución normal, la segunda se basa en una distribución exponencial y la tercera simulación se basa en una distribución uniforme. El resultado que se muestra en la Figura 5.4 se obtiene al ejecutar el Programa 8.

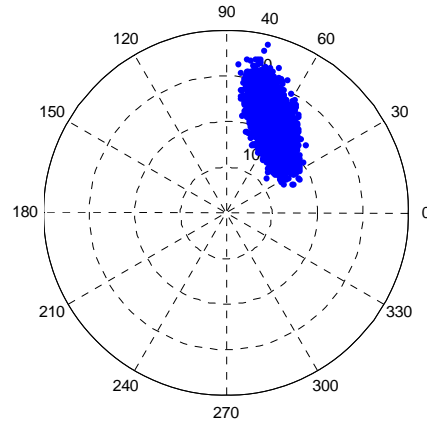


**Figura 5.4. Diagramas de Rosa para Tres Simulaciones**

## 2.4 DIAGRAMA DE DISPERSIÓN EN COORDENADAS POLARES

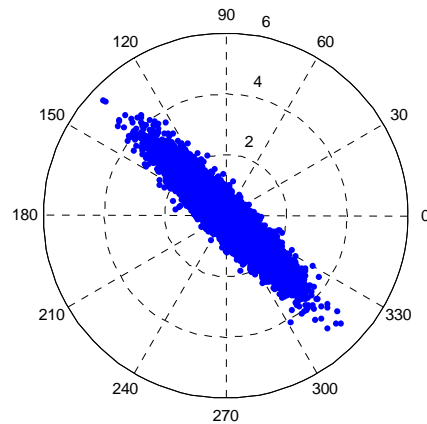
Para construir este diagrama de dispersión, se ha simulado vectores normales bivariados, utilizando el algoritmo de la Sección 2 del Capítulo IV. Los vectores bivariados fueron transformados a coordenadas polares, utilizando la sentencia **cart2pol** del MATLAB. Al ejecutar el Programa 9

del Anexo también basado en la Sección 3 del Capítulo III, se obtiene el resultado que se muestra en la Figura 5.5.



**Figura 5.5. Diagrama de Dispersión en Coordenadas Polares para Vectores Bivariados Simulados**

Al estandarizar los datos, esto es centrados en cero y varianza unitaria, se obtiene el siguiente diagrama de dispersión al ejecutar el mismo programa

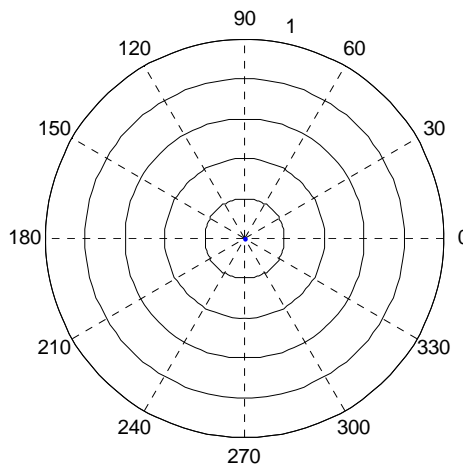


**Figura 5.6. Diagrama de Dispersión en Coordenadas Polares para Vectores Bivariados Simulados Estandarizados**

## 2.5 HISTOGRAMA CIRCULAR 3D EN COORDENADAS POLARES

Este histograma es inspiración del autor del presente trabajo, por lo que no hay referencias adicionales sobre este.

Para construir este Histograma Circular 3D se divide el plano polar en regiones como se muestra en la Figura 5.7. Cada cuña por defecto tiene un ángulo de  $\pi/6$  radianes, pero este ángulo puede variarse. Cada anillo estará dividido entonces en 12 regiones y cada uno de estos tiene un ancho de una unidad por defecto, pero este se puede variar. Cada región se nombra con  $R_{ij}$ , donde  $i$  indica el anillo correspondiente y  $j$  a la cuña que pertenece.



**Figura 5.7. Base del Histograma Circular 3D Dividida en Regiones**

Las matrices  $\mathbf{XX}$ ,  $\mathbf{YY}$  y  $\mathbf{ZZ}$  que contiene las coordenadas polares y la frecuencia, están definidas de la siguiente manera:

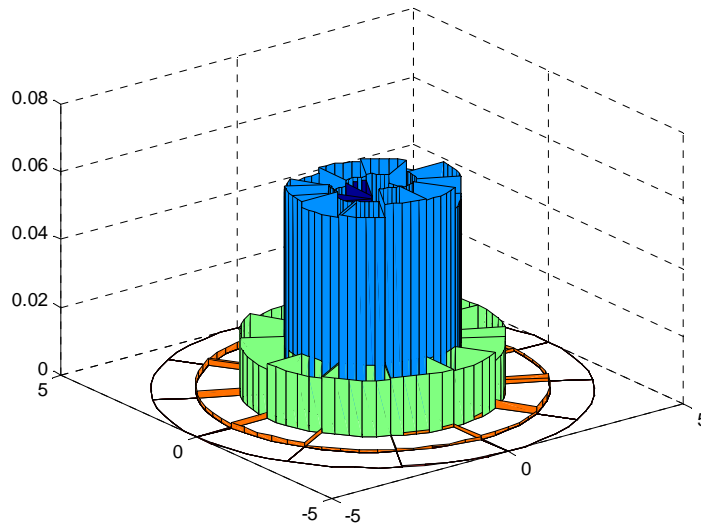
$$\mathbf{XX} = \begin{bmatrix} cc(i-1)\cos\theta_1 & cc(i)\cos\theta_2 & cc(i-1)\cos(\theta-th) \\ cc(i-1)\cos\theta_1 & cc(i)\cos\theta_2 & cc(i-1)\cos(\theta-th) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{YY} = \begin{bmatrix} cc(i-1)\sin\theta_1 & cc(i)\sin\theta_2 & cc(i-1)\sin(\theta-th) \\ cc(i-1)\sin\theta_1 & cc(i)\sin\theta_2 & cc(i-1)\sin(\theta-th) \end{bmatrix}$$

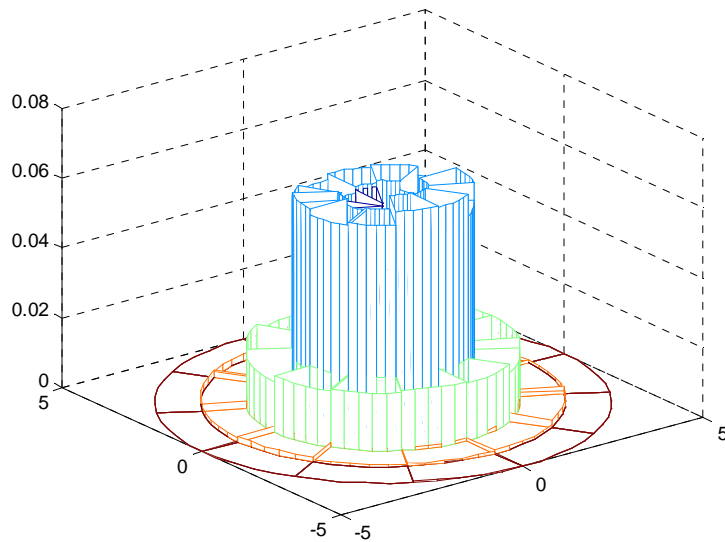
Donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son vectores que contienen los ángulos que forman cada cuña y  $cc$  es el grosor del anillo por defecto este grosor es 1 .

La matriz  $\mathbf{ZZ}$  contiene las frecuencias relativas en cada región así particionada.

Las Figuras 5.8 y 5.9 muestran el resultado de ejecutar el Programa 10, donde algunos de sus fundamentos están detallados en la Sección 3 del Capítulo III. Para esto se simuló vectores normales bivariados y el histograma circular tiene dos presentaciones, para el mismo conjunto de datos.

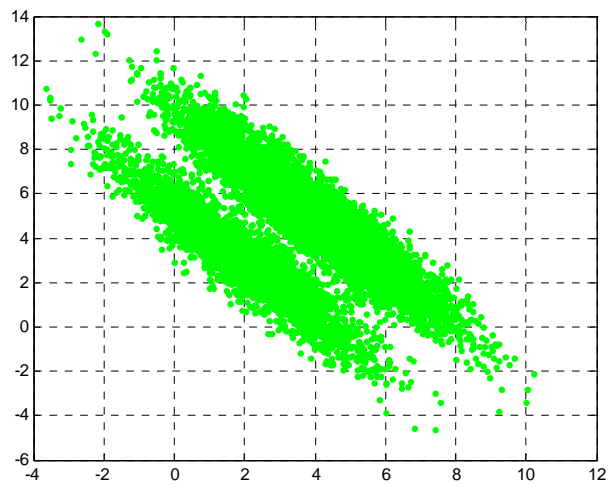


**Figura 5.8. Histograma Circular 3D Utilizando  
La Sentencia Surf**

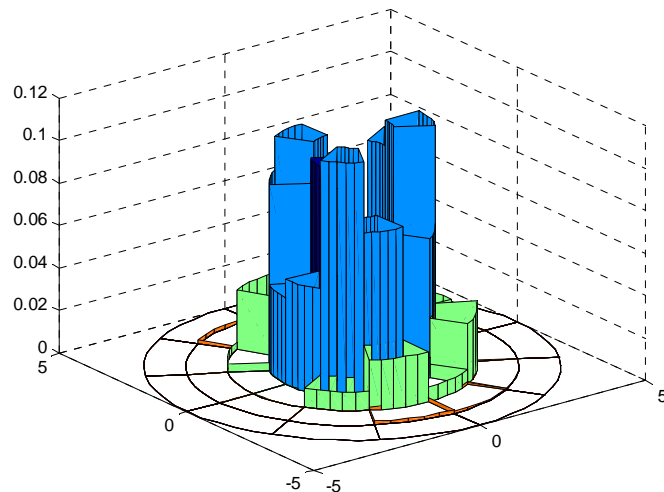


**Figura 5.9. Histograma Circular 3D Utilizando  
La Sentencia Mesh**

Se simuló datos bivariados que fueron generados a partir de una combinación lineal de distribuciones normales bivariadas. Al ejecutar el Programa 11 construido a partir del algoritmo desarrollado en la Sección 2 del Capítulo IV, que se visualiza la Figura 5.10 en donde se muestra el diagrama de dispersión 2D de esta simulación. Se observan dos grupos claramente diferenciados. Más abajo en la Figura 5.11 se visualiza el histograma circular 3D, correspondiente al mismo conjunto de datos simulados.



**Figura 5.10. Diagrama de Dispersión Bivariado para la Simulación obtenida de la Combinación Lineal de Distribuciones.**



**Figura 5.11. Histograma Circular 3D Resultante de la anterior Simulación**

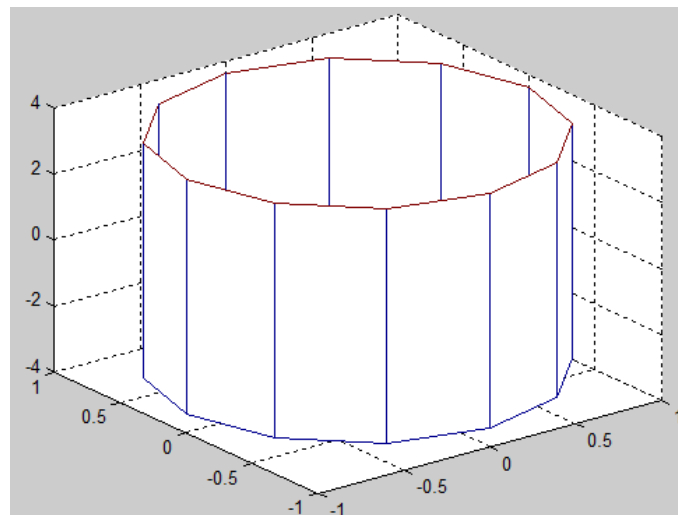
### 3. VISUALIZACIÓN EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

#### 3.1 PROYECCIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE CILÍNDRICA

Las presentes proyecciones fueron inspiración y desarrollo del autor del presente trabajo, por lo que no hay referencias adicionales sobre el tema.

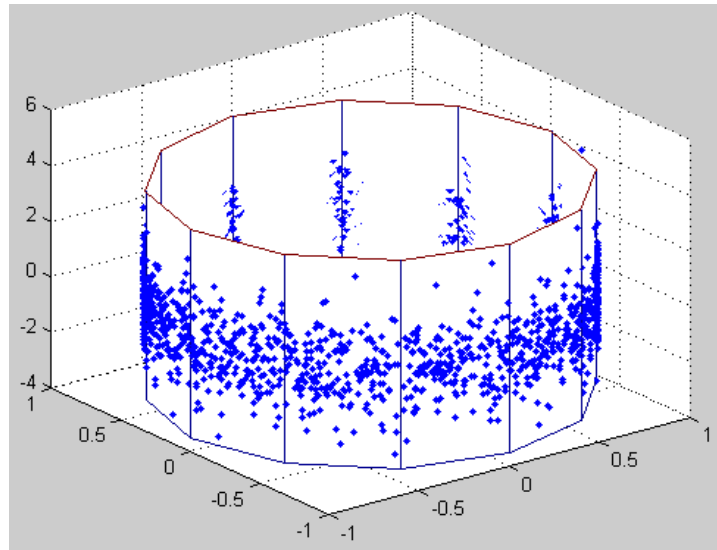
Para visualizar vectores de tres o más componentes, se utiliza la proyección sobre la superficie cilíndrica. Estas coordenadas son las mismas del sistema de coordenadas cilíndricas que se desarrolló en la Sección 3 del Capítulo III, excepto que  $r$  es siempre uno.

El primer paso para poder proyectar los datos, es la construcción de la superficie cilíndrica. Esta se obtiene al ejecutar el Programa 14 del Anexo y se muestra en la Figura 5.12.



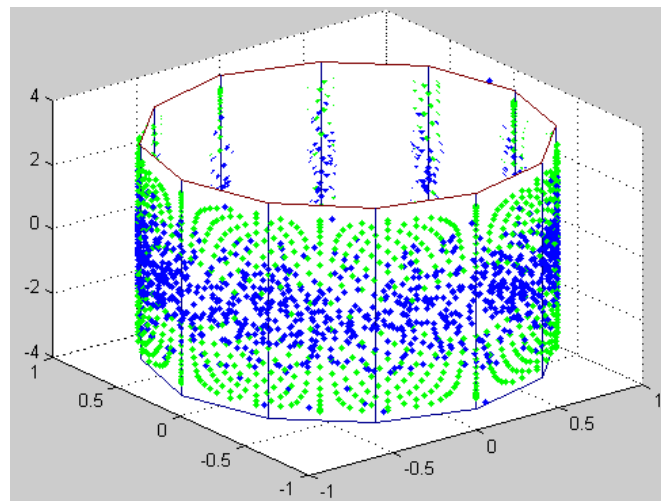
**Figura 5.12. Superficie Cilíndrica de 12 Tajadas**

En Programa 14 genera una simulación de datos trivariados provenientes de una distribución normal. La proyección sobre la superficie cilíndrica de esta simulación se presenta en la Figura 5.13.

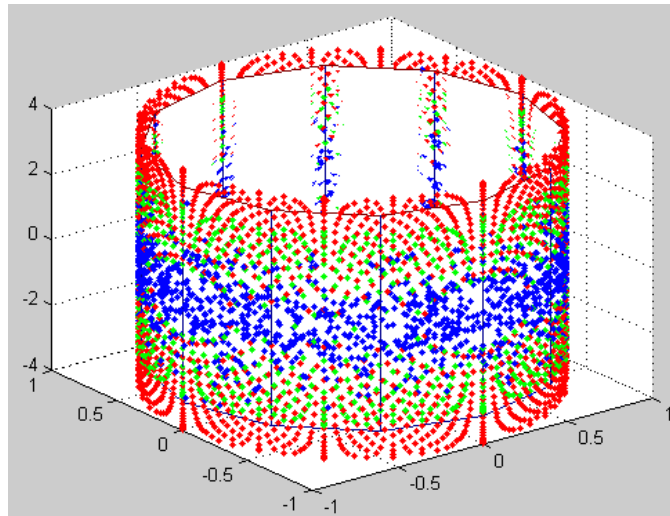


**Figura 5.13. Proyección de los Datos Simulados sobre la Superficie Cilíndrica de 12 Tajadas**

El Programa 14 también genera las bandas donde se pueden detectar datos ligeramente discordantes y fuertemente discordantes. Para el primer caso la banda es de color verde como se muestra en la Figura 5.14. El segundo caso la banda es de color rojo lo cual indicará que el dato proyectado que cae en esta zona posiblemente es fuertemente discordante como se muestra en la Figura 5.15.

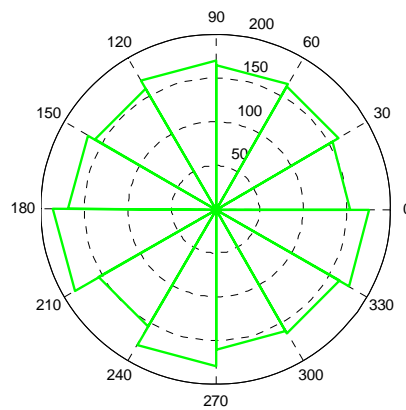


**Figura 5.14. Zona de Datos Ligeramente Discordantes de Color Verde**



**Figura 5.15. Zona de Datos Fuertemente Discordantes de Color Rojo**

A continuación se muestra en la Figura 5.16, un Diagrama de Rosa o histograma circular construido a partir de la cantidad de datos proyectados sobre la superficie cilíndrica que caen en cada tajada.



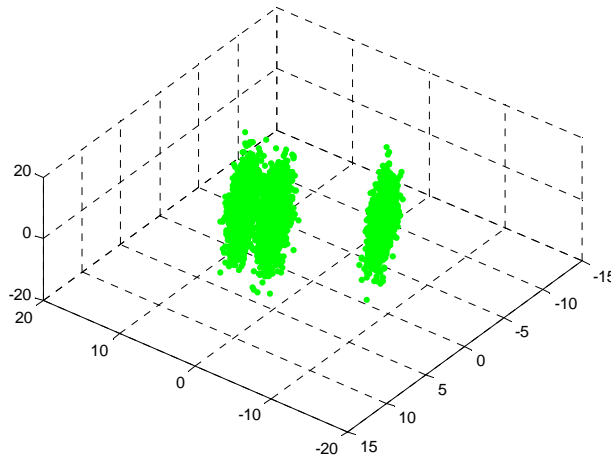
**Figura 5.16. Diagrama de Rosa para la Simulación**

### 3.2 PROYECCIÓN DE UNA ESTRUCTURA SOBRE UNA SUPERFICIE CILÍNDRICA

Se hace la simulación de una estructura (combinación lineal de 3 vectores trivariados normales con diferentes vectores de medias y matriz de

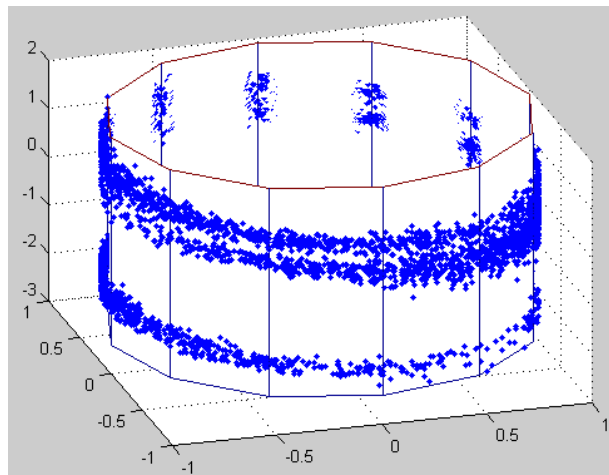


covarianza común), utilizando el algoritmo perteneciente al autor de este trabajo que fue presentado en la Sección 3 del Capítulo IV. Esto se hace modificando ligeramente el Programa 14 del Anexo. Se hace un diagrama de dispersión espacial de esta simulación y el resultado se muestra en la Figura 5.17



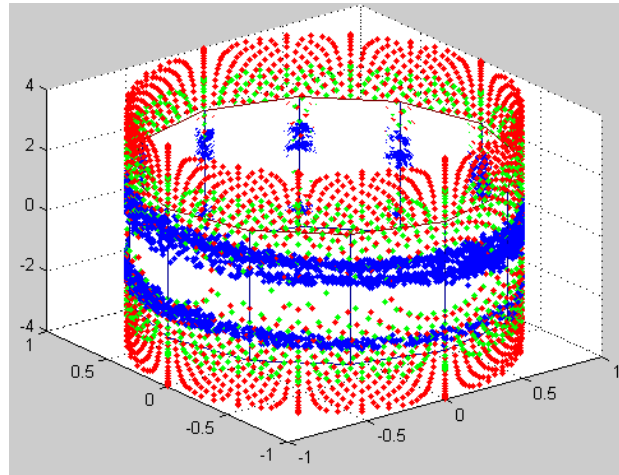
**Figura 5.17. Diagrama de Dispersión 3D de la Estructura Simulada**

A continuación se proyecta esta estructura simulada sobre la superficie cilíndrica como se muestra en la Figura 5.18



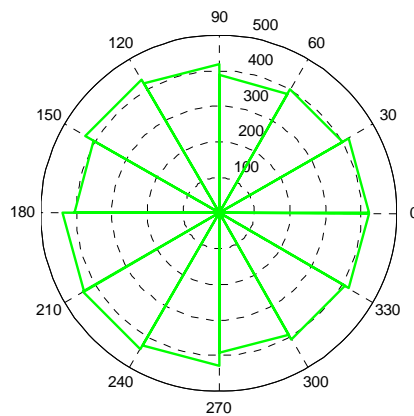
**Figura 5.18. Proyección de la Estructura Simulada sobre la Superficie Cilíndrica**

En la Figura 5.19, se muestra la anterior proyección, pero se incluye las bandas que indican si los datos son posiblemente discordantes



**Figura 5.19. Estructura y Bandas para Detectar Datos Discordantes Proyectados sobre la Superficie Cilíndrica**

A continuación se muestra en la Figura 5.20, un Diagrama de Rosa o histograma circular construido a partir de la estructura proyectada sobre la superficie cilíndrica.



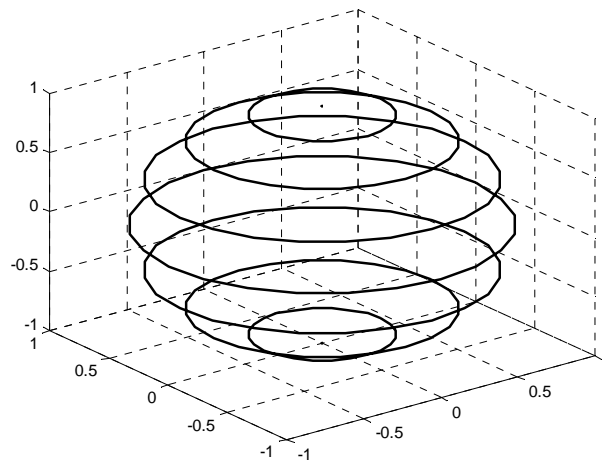
**Figura 5.20. Diagrama de Rosa para la Estructura Simulada**

## 4. VISUALIZACIÓN EN COORDENADAS ESFÉRICAS

### 4.1 PROYECCIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

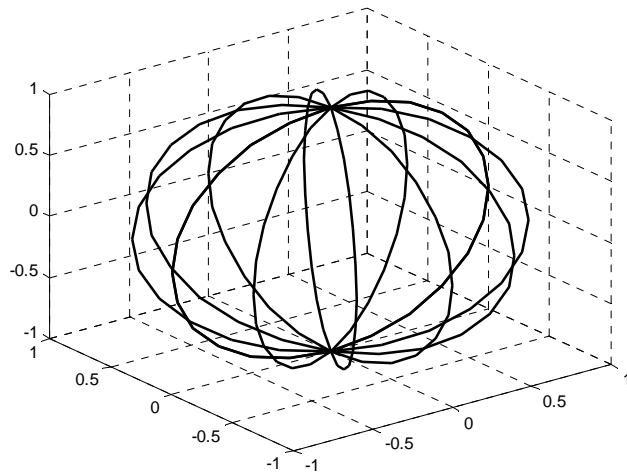
Las presentes proyecciones fueron inspiración y desarrollo del autor del presente trabajo, por lo que no hay referencias adicionales sobre el tema. Para visualizar vectores de 3 o más dimensiones, se utiliza la proyección sobre la superficie esférica. Estas coordenadas son las mismas del sistema de coordenadas esféricas como se desarrolló en la Sección 4 del Capítulo III, excepto que  $r$  es siempre uno.

El primer paso para poder proyectar los datos, es el trazado de las longitudes de la superficie esférica. Estas se obtienen al ejecutar el Programa 12 del Anexo y se muestra en la Figura 5.21.



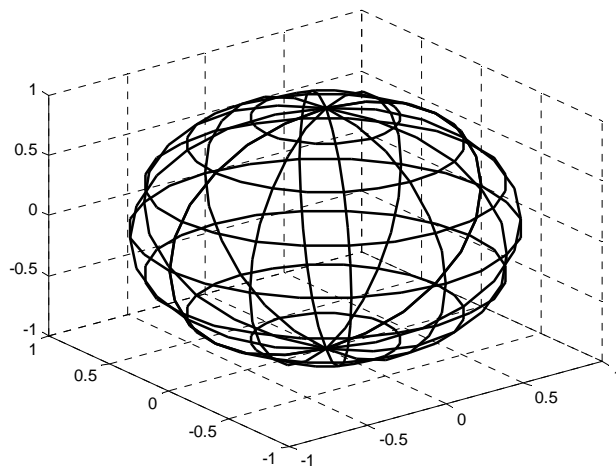
**Figura 5.21. Trazado de las Longitudes en la Superficie Esférica con  $r = 1$**

El segundo paso para poder proyectar los datos, es el trazado de las latitudes de la superficie esférica. Estas se obtienen al ejecutar el programa anterior y se muestra en la Figura 5.22.



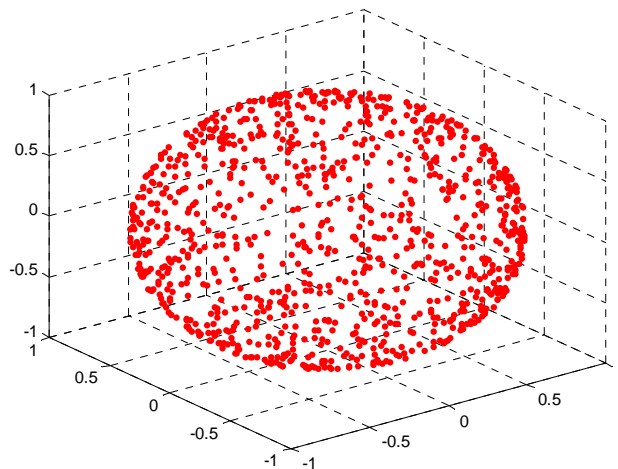
**Figura 5.22. Trazado de las Latitudes en la Superficie Esférica con  $r = 1$ .**

En la Figura 5.23 se muestra la superposición de la Figura 5.21 y la Figura 5.22. Se visualiza la superficie esférica de radio uno con las latitudes y longitudes



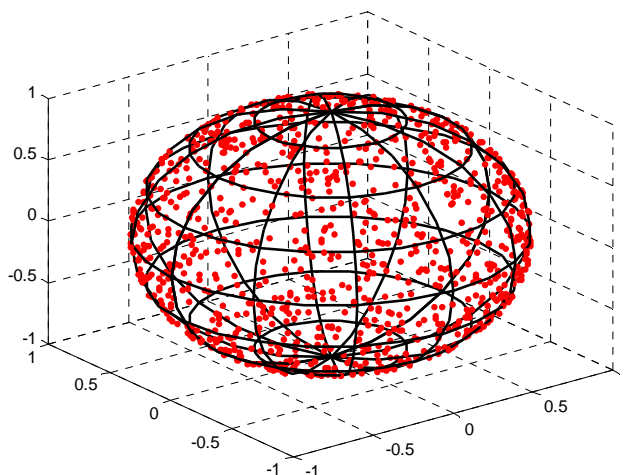
**Figura 5.23. Trazado de las Longitudes y Latitudes en la Superficie Esférica con  $r = 1$ .**

En Programa 12 genera una simulación de datos trivariados obtenidos de una distribución normal. La proyección sobre la superficie esférica de esta simulación se presenta en la Figura 5.24.



**Figura 5.24. Proyección de Vectores Trivariados sobre una Superficie Esférica**

La Figura 5.25 muestra la superposición de las figuras 5.22, 5.23 y 5.24. Las intersecciones de las longitudes con las latitudes definen regiones donde se contabilizan los puntos que se encuentran dentro de estas, obteniéndose de esta manera las frecuencias.

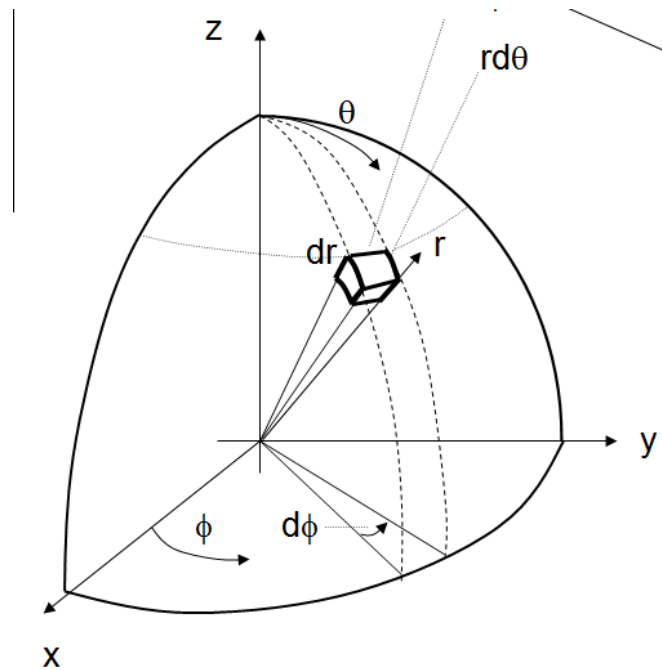


**Figura 5.25. Superposición de las Figuras 5.22, 5.23 y 5.24.**

## 4.2 HISTOGRAMA ESFÉRICO

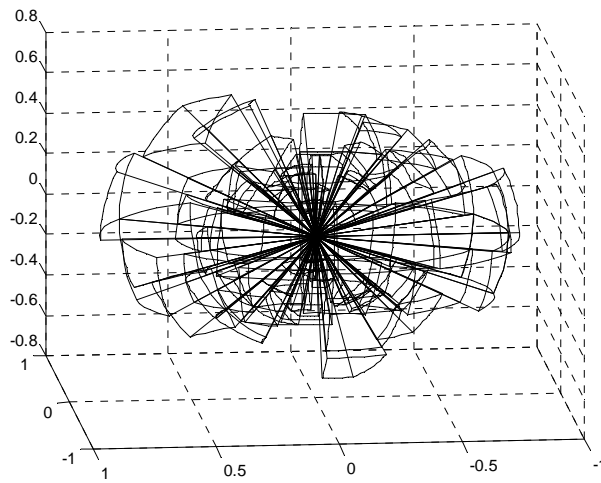
Este histograma esférico es propiedad intelectual del autor del presente trabajo por lo que no habrá referencias adicionales sobre el tema.

La construcción de este histograma esférico se basa en lo desarrollado en la Sección 4 del Capítulo III, donde se descompone la esfera en cuñas o porciones de volúmenes como se muestra en la Figura 5.26. El volumen de cada cuña será proporcional a la cantidad de puntos proyectados sobre la superficie esférica que caen en las regiones limitadas por las longitudes y latitudes desarrolladas en el bloque anterior.

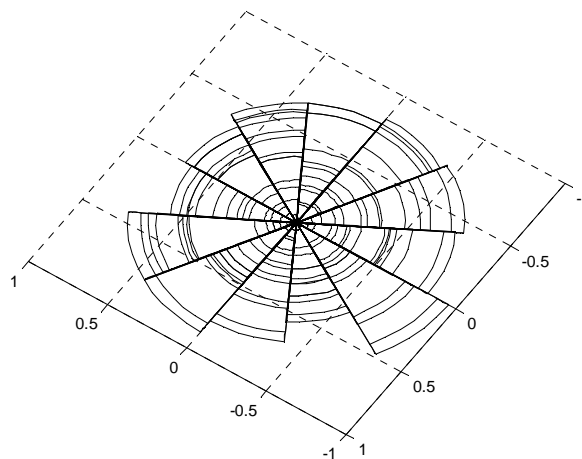


**Figura 5.26. Porción de Volumen de una Esfera de  $r = 1$ .**

Para visualizar el histograma esférico se ejecuta el Programa 12. Para esto se ha simulado un conjunto de datos trivariados provenientes de una distribución normal. Este histograma es mostrado en la Figura 5.27, donde cada cuña es proporcional al número de puntos proyectados que caen en cada región. En la Figura 5.28 se muestra este histograma visualizado desde arriba.

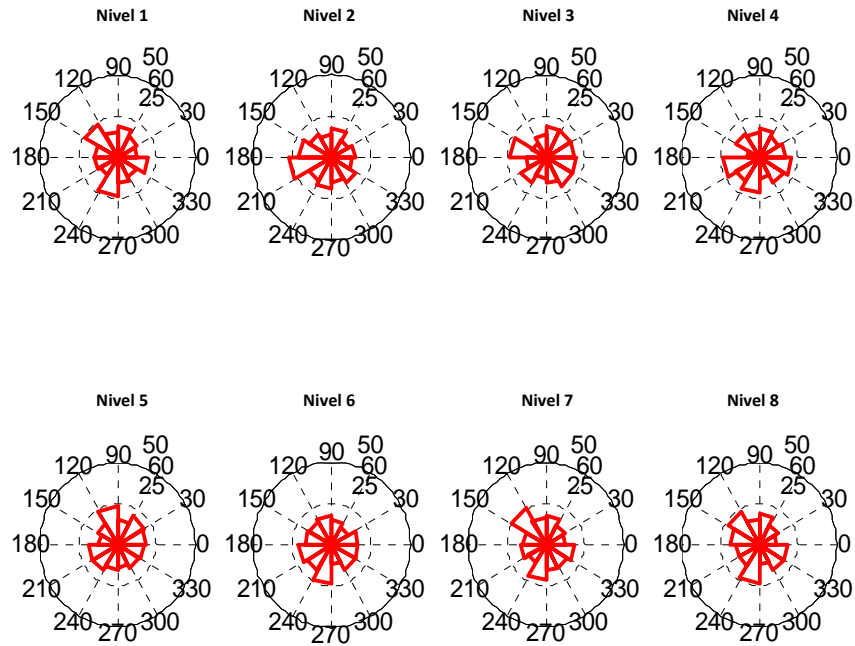


**Figura 5.27. Histograma Esférico para los Vectores Trivariados Simulados.**



**Figura 5.28. Histograma Esférico para los Vectores Trivariados Simulados Visualizado desde Arriba.**

En el histograma esférico anterior no se puede visualizar bien las diferencias entre las cuñas cuyos volúmenes son proporcionales a las frecuencias, por lo que en el mismo programa, también se desarrolló un subprograma para visualizar estos histogramas por nivel, donde cada nivel está definido por los límites entre dos longitudes contiguas. La Figura 5.29 muestra estos niveles mostrados desde abajo hasta arriba (del polo sur al norte).



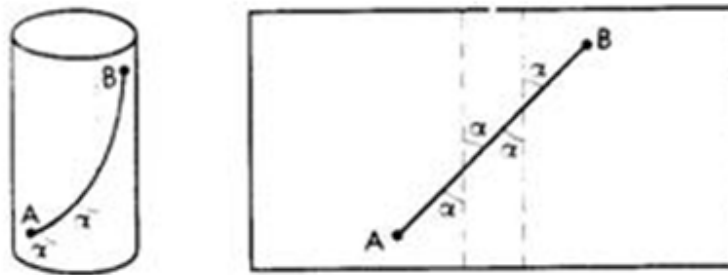
**Figura 5.29. Histograma Esférico Presentado por Niveles de Sur a Norte**

## 5. CÁLCULO DE LAS GEODÉSICAS

### 5.1 PARA LA SUPERFICIE CILÍNDRICA

Para determinar la distancia entre dos puntos proyectados sobre una superficie cilíndrica, se utiliza el concepto de geodésica. Como se desarrolló en la Sección 7.2 del Capítulo III, la geodésica en una superficie cilíndrica que pasa por dos puntos se muestra en la Figura 5.30, así como la forma de calcular la distancia entre dos puntos proyectados sobre esta superficie.





**Figura 5.30. Cálculo de la Distancia entre Dos Puntos  
Proyectados sobre una Superficie Cilíndrica**

## 5.2 PARA LA SUPERFICIE ESFÉRICA

Para determinar la distancia entre dos puntos proyectados sobre una superficie esférica, también se utiliza el concepto de geodésica. Como se desarrolló en la Sección 7.3 del Capítulo 3, la geodésica en una superficie esférica que pasa por dos puntos es aquella circunferencia máxima que pasa por estos puntos y por el centro de dicha esfera. Entonces la distancia entre dos puntos sobre la misma superficie esférica estará dada en función del ángulo formado por los vectores formados por estos puntos proyectados sobre la esfera y el origen. Esta distancia se obtendrá mediante la conocida fórmula:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$$

Como se está trabajando sobre una esfera unitaria o radio uno, entonces  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ , por lo que el ángulo entre estos dos vectores estará dado por  $\alpha = \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . Si este ángulo  $\alpha$  está expresado en radianes también será la distancia entre los dos puntos proyectados sobre la esfera al ser esta de radio uno.

## 6. APLICACIÓN A UN CASO REAL

Para esta aplicación se utiliza la base de datos “crabs” o cangrejos que consta de 200 filas y 8 columnas, donde se describen 5 mediciones morfológicas sobre 200 cangrejos de acuerdo al color y sexo. Estos cangrejos son de la especie *Leptograpsus variegatus* y la recolección fue realizada en Fremantle, W. Australia.

### Fuente

Campbell, N.A. and Mahon, R.J. (1974) A multivariate study of variation in two species of rock crab of genus *Leptograpsus*. Australian Journal of Zoology 22, 417–425.

### Descripción

Estas mediciones son las siguientes:

FL : Tamaño del lóbulo frontal (mm).

RW : Ancho trasero (mm).

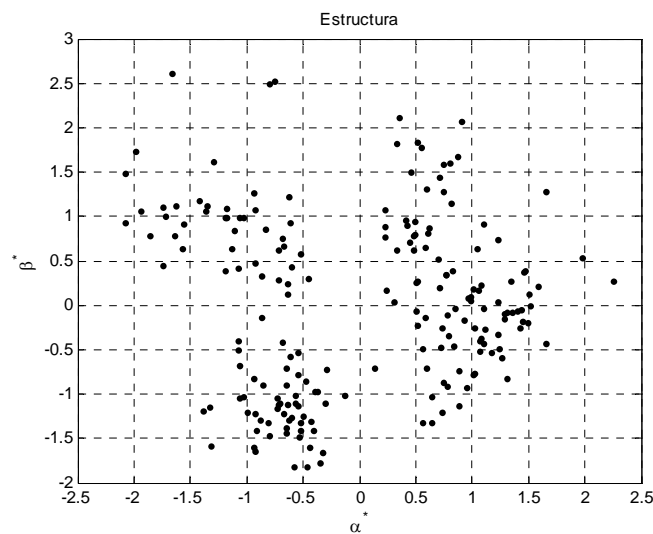
CL : Longitud del caparazón (mm).

CW : Ancho del caparazón (mm).

BD : Profundidad del cuerpo (mm).

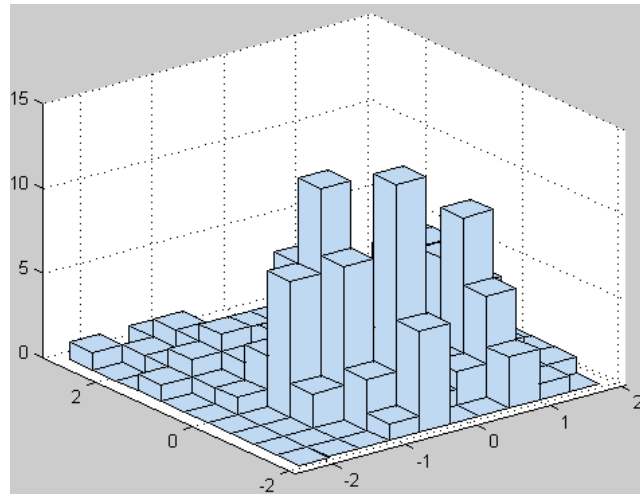
## 6.1 UTILIZANDO PROJECTION PURSUIT

Al ejecutar la primera parte del Programa APLICACIÓN del Anexo, se obtiene la estructura mostrada en la Figura 5.31, utilizando la técnica de Projection Pursuit. Se observa claramente la formación de tres clusters o grupos de cangrejos.



**Figura 5.31. Estructura Obtenida mediante la Projection Pursuit**

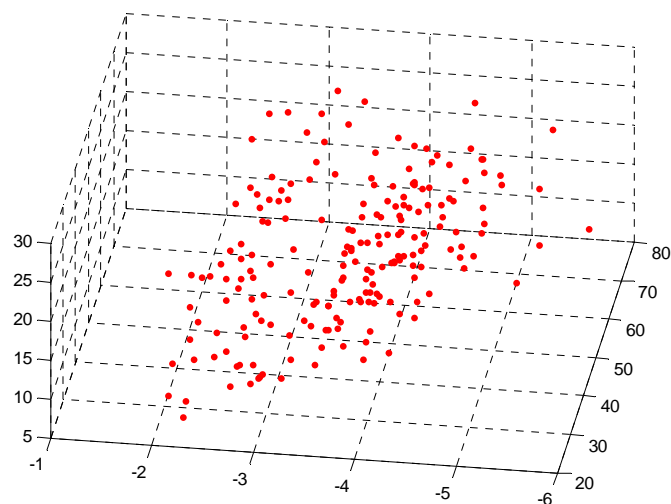
El siguiente histograma 3D se construyó en base a las coordenadas de los datos proyectados en el plano mostrado por la Figura 5.31. El histograma 3D visualizado en la Figura 5.32, muestra claramente que estos datos no han sido generados por un vector aleatorio normal.



**Figura 5.32. Histograma 3D de la Base de Datos Crabs Reducida a Dos Dimensiones**

## 6.2 PROYECTANDO LOS DATOS SOBRE UN SISTEMA CARTESIANO 3D

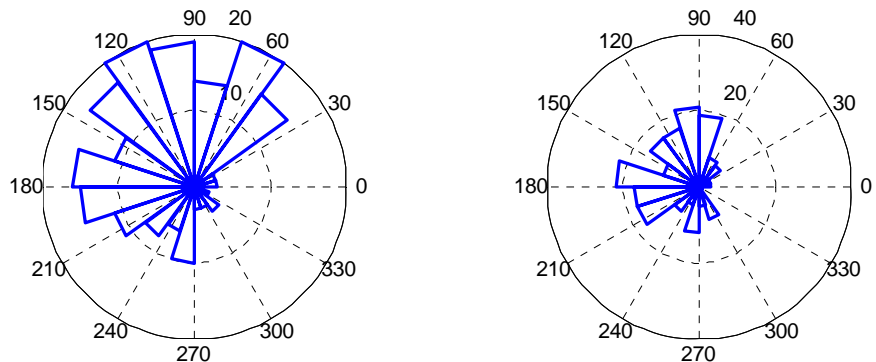
Para reducir la dimensionalidad de la base de datos Crabs, se construye un sistema cartesiano tridimensional mediante tres vectores ortogonales (dimensión cinco). Esto se hace mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para generar tres vectores ortonormales. El resultado se muestra en la Figura 5.33 y esta se obtiene al ejecutar la segunda parte del Programa APLICACION del Anexo.



**Figura 5.33. Estructura Obtenida mediante la Proyección sobre un Sistema Cartesiano 3D**

### 6.3 UTILIZANDO DIAGRAMAS DE ROSA

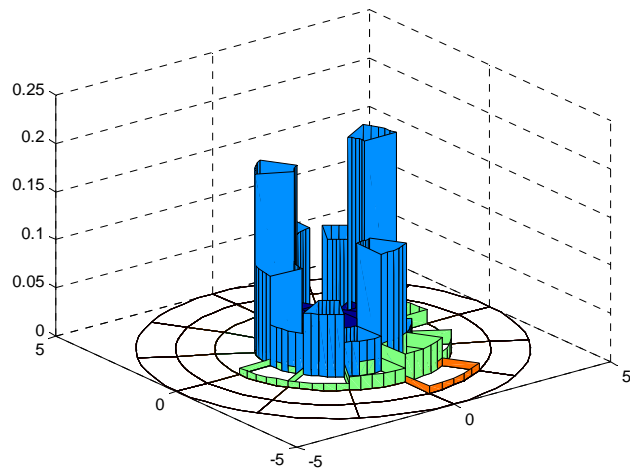
Las coordenadas que se obtuvieron mediante la Projection Pursuit en la Sección 5.1 del presente capítulo, se utilizan para construir un Diagrama de Rosa. El resultado se obtiene al ejecutar la tercera parte del Programa APLICACION el cual se muestra en la Figura 5.34 y se observa claramente que cada componente no se ajusta a una distribución normal.



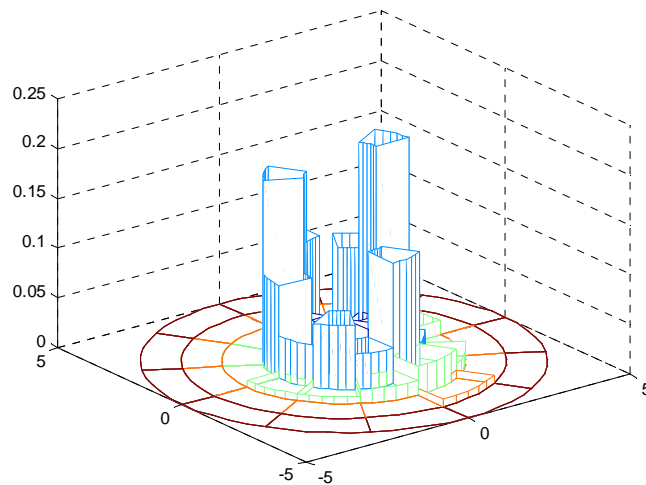
**Figura 5.34. Diagramas de Rosa para cada una de las Componentes obtenidas en la Projection Pursuit**

### 6.4 UTILIZANDO EL HISTOGRAMA CIRCULAR 3D

Las Figuras 5.35 y 5.36 es el resultado de ejecutar la cuarta parte del Programa APLICACION. Aquí se visualiza el histograma circular 3D desarrollado en la Sección 2.5 del presente capítulo. Este histograma circular 3D se construyó a partir de las componentes obtenidas en la Projection Pursuit que se obtuvo en la Sección 5.1 del presente capítulo.



**Figura 5.35. Histograma Circular 3D de la Data Crabs Utilizando la Sentencia Surf**



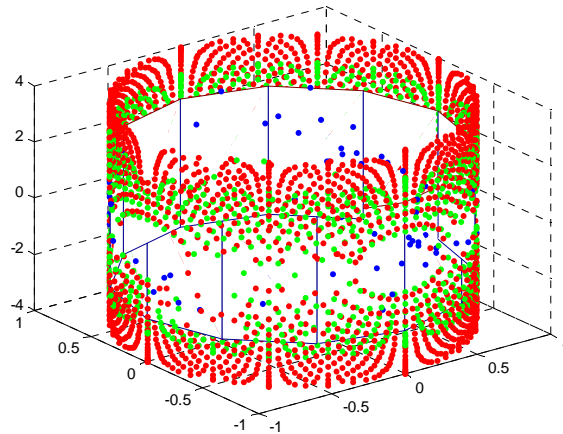
**Figura 5.36. Histograma Circular 3D de la Data Crabs Utilizando la Sentencia Mesh**

Claramente se observa en los histogramas circulares 3D, que los datos no provienen de una distribución normal multivariada.

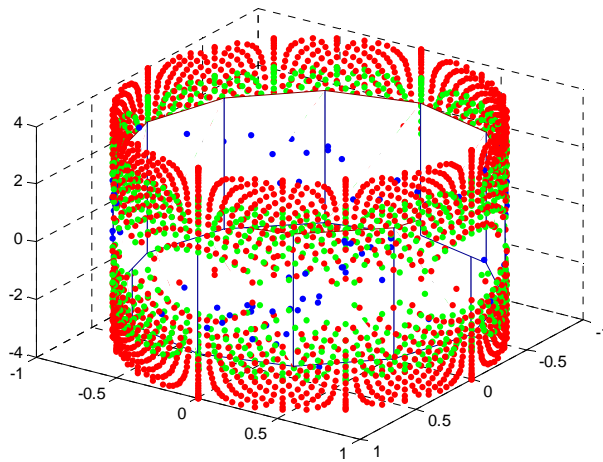
## 6.5 PROYECTANDO LOS DATOS SOBRE UN SUPERFICIE CILÍNDRICA

Las Figuras 5.37, 5.38 y 5.39 es el resultado de ejecutar la sexta parte del Programa APLICACION. En las Figuras 5.37 y 5.38 se observan las

proyecciones de los datos sobre la superficie cilíndrica vistas desde distintos lugares y se nota la estructura de los datos formándose espacios en blancos entre franjas de datos, lo cual indica la no normalidad (estructura) de los datos.

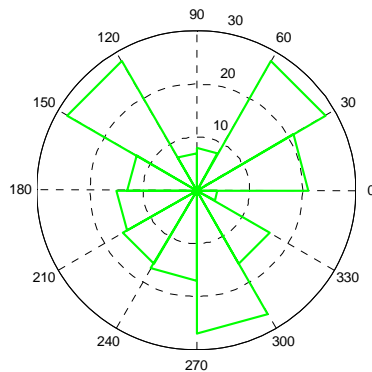


**Figura 5.37. Proyección de la Data Crabs sobre la Superficie Cilíndrica (Vista 1)**



**Figura 5.38. Proyección de la Data Crabs sobre la Superficie Cilíndrica (Vista 2)**

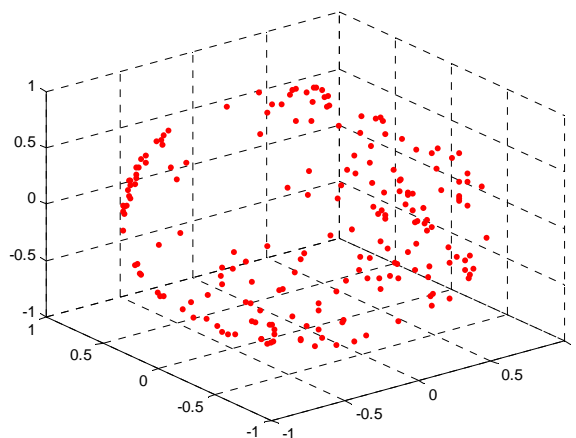
La Figura 5.39 muestra el Diagrama de Rosa de la proyección de la Data Crabs sobre la superficie cilíndrica, vista desde arriba. Nótese la falta de simetría que indica la no normalidad de los datos.



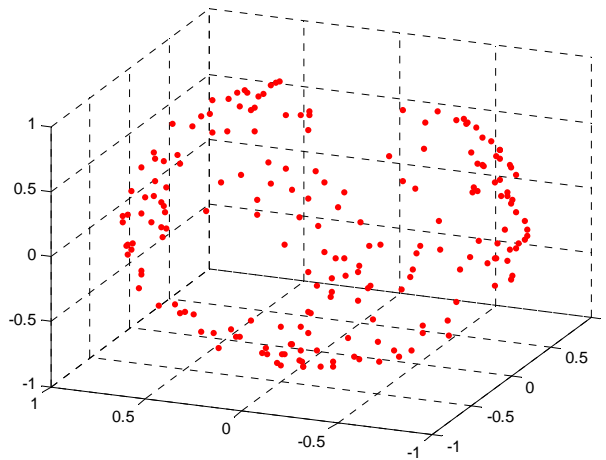
**Figura 5.39. Diagrama de Rosa para los Data Crabs Proyectada sobre la Superficie Cilíndrica (Vista Aérea)**

## 6.6 PROYECTANDO LOS DATOS SOBRE UN SUPERFICIE ESFÉRICA

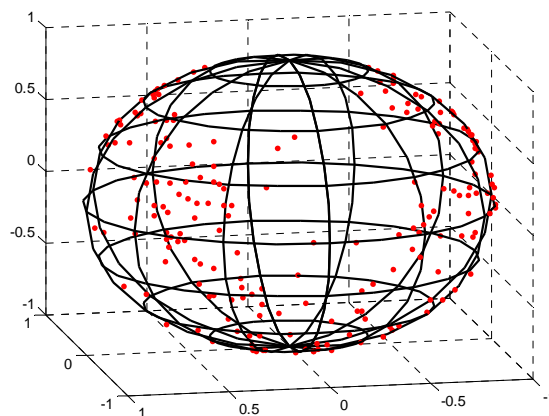
Las Figuras 5.40, 5.41, 5.42 y 5.43 es el resultado de ejecutar la quinta parte del Programa APLICACION. Aquí se visualiza el histograma circular 3D desarrollado en la Sección 3 del presente capítulo. Las Figuras 5.40, 5.41 y 5.42 muestran distintas vistas de esta proyección y se puede observar claramente la estructura. Se puede ver los agujeros entre grupos de datos proyectados.



**Figura 5.40. Proyección de la Data Crabs sobre la Superficie Esférica (Vista 1)**



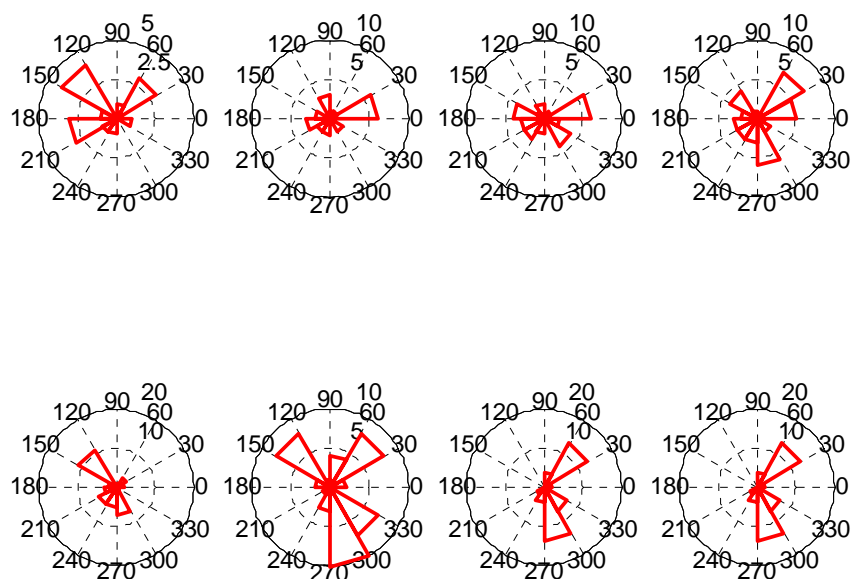
**Figura 5.41. Proyección de la Data Crabs sobre la Superficie Esférica (Vista 2)**



**Figura 5.42. Proyección de la Data Crabs sobre la Superficie Esférica con Latitudes y Longitudes**

En la Figura 5.43, se muestran los Diagramas de Rosa por nivel como se desarrolló en la Sección 2.3 del presente capítulo. Cada nivel es la región limitada por las longitudes contiguas mostradas en la Figura 5.42 (del polo sur al norte). Se ve que no hay simetría en estos diagramas por lo que se puede afirmar que los datos no han sido generados por vectores aleatorios normales.





**Figura 5.43. Diagramas de Rosa por Niveles de Sur a Norte**

## 6.7 CÁLCULO DE LAS DISTANCIAS MEDIANTE LAS GEODÉSICAS

Para desarrollar la presente sección, se utilizó todo lo detallado en las secciones 5, 6 y 7 del Capítulo III.

A continuación se muestran las distancias calculadas entre los diez primeros cangrejos proyectados sobre las superficies cilíndrica y esférica, respectivamente. Estas distancias fueron obtenidas como se describió en la Sección 5 del presente capítulo. Para obtener estos resultados se ejecutó el Programa APLICACION, del Anexo en lo que corresponde a las geodésicas en coordenadas cilíndricas y esféricas. Los resultados para los cinco primeros cangrejos se detallan a continuación en la Tabla 5.1. Los demás resultados pueden ser obtenidos al ejecutar programa anteriormente mencionado.

TABLA 5.1. DISTANCIAS CALCULADAS MEDIANTE LAS GEODÉSICAS					
DISTANCIAS CILÍNDRICAS			DISTANCIAS ESFÉRICAS		
Cangrejo i	Cangrejo j	Distancia	Cangrejo i	Cangrejo j	Distancia
1	1	0.0000	1	1	0.0000
1	2	0.6864	1	2	0.2110
1	3	1.6488	1	3	0.4519
1	4	1.1776	1	4	0.3760
1	5	1.2292	1	5	0.4000
2	1	0.6864	2	1	0.2110
2	2	0.0000	2	2	0.0000
2	3	0.9720	2	3	0.2497
2	4	0.4968	2	4	0.2570
2	5	0.5475	2	5	0.2760
3	1	1.6488	3	1	0.4519
3	2	0.9720	3	2	0.2497
3	3	0.0000	3	3	0.0000
3	4	0.5551	3	4	0.2151
3	5	0.5119	3	5	0.2108
4	1	1.1776	4	1	0.3760
4	2	0.4968	4	2	0.2570
4	3	0.5551	4	3	0.2151
4	4	0.0000	4	4	0.0000
4	5	0.0519	4	5	0.0242
5	1	1.2292	5	1	0.4000
5	2	0.5475	5	2	0.2760
5	3	0.5119	5	3	0.2108
5	4	0.0519	5	4	0.0242
5	5	0.0000	5	5	0.0000

Nótese que existe correspondencia entre ambas distancias, distancias grandes en la superficie cilíndrica le corresponde distancias grandes en la superficie esférica y viceversa.

# **CAPÍTULO VI**

## **CONCLUSIONES**

1. Los gráficos polares, así como los Diagramas de Rosa, permite una mejor percepción de la simetría de los datos univariados, en especial si se está comparando con la distribución normal.
2. La Projection Pursuit como técnica de reducción de la dimensión con poca pérdida de información de los datos es base para la proyección de datos multidimensionales en otros sistemas coordenados.
3. El Histograma Circular 3D produjo buenos resultados sobre todo para la apreciación de la simetría en datos multivariados. Se pudo notar que este tipo de gráfico es más natural para la búsqueda de estructuras o desviaciones con el supuesto de normalidad.
4. La proyección de los datos en un sistema coordenado cilíndrico, tuvo los mejores resultados de estas técnicas exploratorias propuestas. Se pudo conocer estructuras de los datos a través de caminos donde no hay proyección de datos, además de formar bandas donde se puede determinar posibles datos discordantes o fuertemente discordantes.
5. La proyección de los datos en un sistema coordenado esférico, tuvo el éxito de poder proyectar claramente clusters o grupos de datos y se va mejorando la perspectiva a través de rotaciones de esta superficie de proyección.
6. El Histograma Esférico dio pobres resultados, por la dificultad de visualizar las tajadas delimitadas por las longitudes y latitudes. Esto se mejoró a través de los Diagramas de Rosa por niveles que fueron definidos por dos longitudes continuas de la superficie esférica.
7. Las distancias entre datos proyectados se calculó mediante las geodésicas y se observó que guardaban proporción las distancias en un sistema u otro, pero a diferentes escalas.
8. La nueva forma de simulación de datos multidimensionales utilizando el proceso inverso de la técnica de las Componentes Principales funciona y se

puede comprobar comparando la matriz de correlación objetivo y la matriz de correlación obtenida a partir de lo simulado.

9. Al aplicar las nuevas técnicas de exploración desarrolladas a la base de datos Crabs, se obtuvo resultados concordantes con lo que ya se conocía de estos datos.
10. El análisis tensorial unifica las operaciones en los distintos sistemas coordenados y en el presente trabajo ha servido para unificarlos, como por ejemplo la construcción del Histograma Circular 3D, tomando como base las coordenadas polares.
11. Para hacer un análisis exploratorio de datos multidimensionales, se deben de utilizar adicionalmente a lo tradicional estas nuevas técnicas, para descubrir con mayores posibilidades estructuras ocultas de estos datos como se mostró en el presente trabajo.
12. El MATLAB es el software ideal para la aplicación del análisis tensorial, ya que la mayoría de estas transformaciones se expresan en matrices y la visualización espacial de estas transformaciones pueden ser vistas desde muchos ángulos.

## BIBLIOGRAFÍA PRIMARIA

1. Butkov E. Mathematical Physics. Addison – Wesley. 1968. 9: 332 – 394.
2. Hawkins G. Multilinear analysis for students in engineering and science. John Wiley and Sons, Inc. 1963. 6: 93 – 153.
3. Lipschutz M. Geometría diferencial. McGraw – Hill 1970; 11: 214 – 241.
4. Martinez W., Martinez A., Computational Statistics Handbook with MATLAB. Chapman & Hall/CRC. 2002. 5: 168 – 178.
5. Martinez W., Martinez A., Exploratory data analysis with MATLAB. Chapman & Hall/CRC. 2005. 4: 112 – 120.
6. Mase G. Mecánica del medio continuo. McGraw – Hill 1977; 1: 19 – 34.
7. Mood A., Graybill F. Introducción a la teoría estadística. Aguilar. 1972; 9: 228 – 252.
8. Seier E., Cambillo E., Cárdenas A., Adiazola Y. Análisis de componentes principales en la detección de datos discordantes. PESQUIMAT. Revista de la F.C.M. de la U.N.M.S.M. Vol II - N° 1. Pgs. 77 – 85. Agosto 1999. Lima – Perú.
9. Seier E., Cambillo E., Cárdenas A., Adiazola Y. Influencia de los datos discordantes sobre la matriz de correlación y correlación parcial en un conjunto de datos multivariados. PESQUIMAT. Revista de la F.C.M. de la U.N.M.S.M. Vol III - N° 2. Pgs. 34 – 43. Noviembre 2000. Lima – Perú.

## ANEXO

# CÓDIGO FUENTE DE LOS PROGRAMAS

### PROGRAMA 1

```
%DIAPOSITIVA FRÁFICA DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIANTE
clear;
clc;
rho=0;
[X1,X2] = meshgrid(-4:0.1:4, -4:0.1:4);
Z = (1/(2*pi*sqrt(1-rho^2)))*exp(-(0.5/(1-rho^2))*(X1.^2-
2*rho*X1.*X2+X2.^2));
surf(X1,X2,Z)
```

### PROGRAMA 2

```
%REGIONES Bk
cc=sqrt(2*log(6))/5;
for radio=0:cc:5*cc
i=0;
for angulo=0:2*pi/200:2*pi
i=i+1;
x(i)=radio*cos(angulo);
y(i)=radio*sin(angulo);
end
plot(x,y)
hold on
end
line([-3,3],[0 0])
hold on
line([0 0],[-3,3])
hold on
line([3 -3],[3,-3])
hold on
line([-3 3],[3,-3])
hold on
grid on
```

### PROGRAMA 3

```
%GENERACIÓN DE VECTORES ALEATORIOS MULTIVARIADOS
clear;
clc;
SIGMA=[107746.3 11875.63 268.34 389.19 1704.49 -25.3
11875.63 5362.88 24.44 156.36 293.25 -31.44
268.34 24.44 15.97 10.64 14.02 0.76
389.19 156.36 10.64 269.93 34.59 3.64
1704.49 293.25 14.02 34.59 465.3 2.68
-25.3 -31.44 0.76 3.64 2.68 2.25]
V=diag(diag(SIGMA))
R=(V^(-0.5))*SIGMA*(V^(-0.5));
p=6;
n=6000;
[L,D]=eig(SIGMA)
```

```

MU=[1000 2000 1500 3100 900 1800]';
for j=1:p
Y(:,j)=normrnd(0,sqrt(D(j,j)),n,1);
end
MUM=ones(n,1)*MU';
Z=Y*L';
X=MUM+Z;
R
corr(X)
mean(X)
subplot(2,3,1)
hist(X(:,1))
subplot(2,3,2)
hist(X(:,2))
subplot(2,3,3)
hist(X(:,3))
subplot(2,3,4)
hist(X(:,4))
subplot(2,3,5)
hist(X(:,5))
subplot(2,3,6)
hist(X(:,6))
plot(X(:,1),X(:,6),'.red')
grid on
plot3(X(:,1),X(:,2),X(:,3),'.green')
grid on
XX=[X(:,1),X(:,3)]
hist3(XX)

```

## PROGRAMA 4

```

%GENERACIÓN DE VECTORES ALEATORIOS BIMODALES
clear;
clc;
mu1 = [100000 9000 20 500 400 10];
mu2 = [101000 9100 25 540 430 13];
SIGMA=[107746.3 11875.63 268.34 389.19 1704.49 -25.3
11875.63 5362.88 24.44 156.36 293.25 -31.44
268.34 24.44 15.97 10.64 14.02 0.76
389.19 156.36 10.64 269.93 34.59 3.64
1704.49 293.25 14.02 34.59 465.3 2.68
-25.3 -31.44 0.76 3.64 2.68 2.25]
n=1000;
for i=1:n
u=unifrnd(0,1);
if u<0.3
X(i,:)=mvnrnd(mu1,SIGMA);
else
X(i,:)=mvnrnd(mu2,SIGMA);
end
end
plot(X(:,5),X(:,3),'.red')
grid on

```

## PROGRAMA 5

```
%PROJECTION PURSUIT DE VECTORES ALEATORIOS TRIMODALES
clear;
clc;
mu1 = [100000 9000 20 500 400 10];
mu2 = [101000 9100 25 540 430 13];
mu3= [99000 8900 19 480 350 8];
SIGMA=[107746.3 11875.63 268.34 389.19 1704.49 -25.3
11875.63 5362.88 24.44 156.36 293.25 -31.44
268.34 24.44 15.97 10.64 14.02 0.76
389.19 156.36 10.64 269.93 34.59 3.64
1704.49 293.25 14.02 34.59 465.3 2.68
-25.3 -31.44 0.76 3.64 2.68 2.25]
n=1000;
for i=1:n
u=unifrnd(0,1);
X(i,:)=mvnrnd(mu2,SIGMA);
if u<0.3
X(i,:)=mvnrnd(mu1,SIGMA);
end
if u> 0.6
X(i,:)=mvnrnd(mu3,SIGMA);
end
end

% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2))*V'*Xc)';

% Para m inicios aleatorios, encontrar el mejor plano
N = 2;
m = 4;
c = tan(80*pi/180);
half = 30;
astar = zeros(d,N);
bstar = zeros(d,N);
ppmax = zeros(1,N);

% Ejecutar PPEDA.
Zt = Z;
i=1;
[astar(:,i),bstar(:,i),ppmax(i)] =csppeda(Zt,c,half,m);

% Se proyecta y visualiza la estructura
proj1 = [astar(:,1), bstar(:,1)];
proj2 = [astar(:,2), bstar(:,2)];
Zp1 = Z*proj1;
Zp2 = Z*proj2;
figure
plot(Zp1(:,1),Zp1(:,2),'k.'),title('Estructura')
xlabel('\alpha^*'),ylabel('\beta^*')
grid on
```



## PROGRAMA 6

%FUNCIÓN DE DENSIDAD NORMAL EN COORDENADAS POLARES

```
clear;
clc;
h=0.1;
x=-4:h:4
fx=(1/sqrt(2*pi))*exp(-x.^2/2)
[thetal,r] = cart2pol(x,fx)
polar(thetal,r)
```

## PROGRAMA 7

%TRANSFORMACIÓN DE UN HISTOGRAMA CLÁSICO EN COORDENADAS POLARES

```
clear;
clc;
n=10000;
x=normrnd(0,1,n,1);
[a,b]=hist(x,20)
subplot(2,2,1)
hist(x,20)
x1=b
fx1=100*a/sum(a)
[thetal,r] = cart2pol(x1,fx1)
subplot(2,2,3)
polar(thetal,r)
[a,b]=hist(x,200)
subplot(2,2,2)
hist(x,200)
x1=b
fx1=100*a/sum(a)
[thetal,r] = cart2pol(x1,fx1)
subplot(2,2,4)
polar(thetal,r)
```

## PROGRAMA 8

%Diagrama de rosa

```
clear;
clc;
%Datos Buffalo snowfall
X=load("Buffalo.txt")
a=2*pi/(max(x)-min(x));
b=-a*min(x);
theta=a*x+b;
rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)
```

%Normal Escalado

```
n=20000;
x=normrnd(1000,50,n,1);
a=2*pi/(max(x)-min(x));
b=-a*min(x);
theta=a*x+b;
subplot(1,3,1)
```

```

rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)

```

#### %Exponencial Escalado

```

n=20000;
x=exprnd(2,n,1)
a=2*pi/(max(x)-min(x));
b=-a*min(x);
theta=a*x+b;
subplot(1,3,2)
rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)

```

#### %Uniforme Escalado

```

n=20000;
x=unifrnd(0,1,n,1);
a=2*pi/(max(x)-min(x));
b=-a*min(x);
theta=a*x+b;
subplot(1,3,3)
rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)

```

## PROGRAMA 9

### %DIAGRAMA DE DISPERSIÓN EN COORDENADAS POLARES

```

clear;
clc;
rho=-0.5;
sigma1=2;
sigma2=4;
mu1=10;
mu2=20;
n=10000;
d=exprnd(2,n,1);
theta=unifrnd(0,2*pi,n,1);
w=d.^0.5.*cos(theta);
v=d.^0.5.*sin(theta);
u=sqrt(1-rho^2)*w+rho*v;
X1=sigma1*u+mu1;
X2=sigma2*v+mu2;
[theta1,r] = cart2pol(X1,X2)
polar(theta1,r,'.')

```

### %Regiones con los datos simulados estandarizados proyectados en coordenadas polares

```

clear;
clc;
n=10000;
mu1 = [2 3];
SIGMA = [3 -3.6
-3.6 5];
datos= mvnrnd(mu1,SIGMA,n);

```

```

plot(datos(:,1),datos(:,2),'.')

%Estandarización de los datos
MU=mean(datos)
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
D=diag(diag(cov(datos)))
Z=datosc*D^(-1/2)
[theta,rho] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2))
polar(theta, rho, '.')

%Regiones con los datos estandarizados proyectados en coordenadas
polares
clear;
clc;
datos=load('base1.txt');
%Estandarización de los datos
MU=mean(datos)
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
D=diag(diag(cov(datos)))
Z=datosc*D^(-1/2)
[theta,rho] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2))
polar(theta, rho, '.')

```

## PROGRAMA 10

```

%HISTOGRAMA CIRCULAR 3D EN COORDENADAS POLARES
%Regiones con los datos esferizados proyectados en coordenadas polares
clear;
clc;
n1=10000;
mul = [2 3];
SIGMA = [3 -3.6
-3.6 5];
datos= mvnrnd(mul,SIGMA,n1);
sec=12;
%Ángulo de cada sección
h=2*pi/sec

%Esferización de los datos
SIGMA=cov(datos);
[V,D]=eig(SIGMA);
MU=mean(datos);
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
Z=(D^(-1/2)*V'*datosc)';
[theta,rho] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2));
l=5;
CONTEO=zeros(l,sec);
n=size(Z);
for i=1:n(1)
kr=ceil(rho(i));
if theta(i)>=0
ktheta=ceil(theta(i)/h);
end

```

```

if theta(i)<0
ktheta=ceil((theta(i)+2*pi)/h);
end
CONTEO(kr,ktheta)=CONTEO(kr,ktheta)+1;
end
PROP=CONTEO/sum(sum(CONTEO));
cc=1

%Número de subtajadas
hh=5
for i=1:l
A(i)=(pi/sec)*cc^2*(2*i-1)
end
factor=1/sum(CONTEO'*A')
ha=factor*CONTEO
for th=h:h:2*pi
for i=1:l
th1=(th-h):h/hh:th];
th2=[th:-h/hh:(th-h)];
XX=[cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)
cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)];
YY=[cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)
cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)];
nz=size(XX);
ZZ=zeros(nz(1),nz(2));
ZZ(2,:)=ha(i,round(th/h));
CC=(i/l)*ones(nz(1),nz(2));
surf(XX,YY,ZZ,CC)
hold on
end
end
sum(ha'*A')

```

## PROGRAMA 11

```

%HISTOGRAMA CIRCULAR 3D EN COORDENADAS POLARES
%Regiones con los datos esferizados proyectados en coordenadas polares
clear;
clc;
n1=10000;
mu1 = [2 3];
mu2 = [4 5]
SIGMA = [3 -3.6
-3.6 5];
for i=1:n1
u=unifrnd(0,1);
if u<0.3
datos(i,:)=mvnrnd(mu1,SIGMA);
else
datos(i,:)=mvnrnd(mu2,SIGMA);
end
end
sec=12;
%Ángulo de cada sección
h=2*pi/sec;

```

```

%Esferización de los datos
SIGMA=cov(datos);
[V,D]=eig(SIGMA);
MU=mean(datos);
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
Z=(D^(-1/2)*V'*datosc')';
[theta,rho] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2));
l=5;
CONTEO=zeros(1,sec);
n=size(Z);
for i=1:n(1)
kr=ceil(rho(i));
if theta(i)>=0
ktheta=ceil(theta(i)/h);
end
if theta(i)<0
ktheta=ceil((theta(i)+2*pi)/h);
end
CONTEO(kr,ktheta)=CONTEO(kr,ktheta)+1;
end
PROP=CONTEO/sum(sum(CONTEO));
cc=1

%Número de subtajadas
hh=5
for i=1:l
A(i)=(pi/sec)*cc^2*(2*i-1)
end
factor=1/sum(CONTEO'*A')
ha=factor*CONTEO
for th=h:h:2*pi
for i=1:l
th1=(th-h):h/hh:th;
th2=[th:-h/hh:(th-h)];
XX=[cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)
cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)];
YY=[cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)
cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)];
nz=size(XX);
ZZ=zeros(nz(1),nz(2));
ZZ(2,:)=ha(i,round(th/h));
CC=(i/l)*ones(nz(1),nz(2));
surf(XX,YY,ZZ,CC)
hold on
end
end
sum(ha'*A')

```

## PROGRAMA 12

```

%PROYECCIÓN DE LOS DATOS EN COORDENADAS ESFÉRICAS
clear;
clc;
secphi=8
secth=6;

```

```

%Simulación de los datos
n1=1000;
mul = [2 3 4];
SIGMA = [3 -3.6 2
-3.6 5 -1.5
2 -1.5 6];
datos= mvnrnd(mul,SIGMA,n1);

%Esferización de los datos
SIGMA=cov(datos);
[V,D]=eig(SIGMA);
MU=mean(datos);
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
Z=(D^(-1/2)*V'*datosc)';
for i=1:n1
    ZN(i,1:3)=Z(i,1:3)/norm(Z(i,1:3));
end
plot3(ZN(:,1),ZN(:,2),ZN(:,3),'.red')
hold on

%Trazo de latitudes y longitudes
r=1;
for phi=-pi/2:pi/secphi:pi/2
    radio=r*cos(phi);
    altura=r*sin(phi);
    cont=0;
    for ang=0:pi/12:2*pi
        cont=cont+1;
        X1(cont)=radio*cos(ang);
        X2(cont)=radio*sin(ang);
        X3(cont)=altura;
    end
    plot3(X1,X2,X3,'black')
    hline = findobj(gca,'Type','line');
    set(hline,'LineWidth',2)
    hold on
end
for th=0:pi/sectheta:pi
    cont=0;
    for ang=0:pi/12:2*pi
        cont=cont+1;
        Y1(cont)=r*cos(ang)*cos(th);
        Y2(cont)=r*cos(ang)*sin(th);
        Y3(cont)=r*sin(ang);
    end
    plot3(Y1,Y2,Y3,'black')
    hline = findobj(gca,'Type','line');
    set(hline,'LineWidth',2)
    hold on
end
grid on
[THETA3,PHI3,R3] = cart2sph(ZN(:,1),ZN(:,2),ZN(:,3))
CONTEO=zeros(2*secth,secphi)
for i=1:n1
    indphi=ceil((PHI3(i)+pi/2)/(pi/secphi));

```

```

indtheta=ceil((THETA3(i)+pi)/(pi/secth));
CONTEO(indtheta,indphi)=CONTEO(indtheta,indphi)+1;
end
SUMA=0;
i=0;
for th=(-pi+pi/secth):pi/secth:pi
i=i+1;
j=0;
for phi=(-pi/2+pi/secphi):pi/secphi:pi/2
j=j+1;
SUMA=SUMA+CONTEO(i,j)^3*(sin(-pi/2+j*pi/secphi)-sin(-pi/2+(j-1)*pi/secphi))*pi/secth;
CONTEO(i,j)^3*(sin(-pi/2+j*pi/secphi)-sin(-pi/2+(j-1)*pi/secphi))*pi/secth
end
end
factor=(3/SUMA)^(1/3)
R=factor*CONTEO
i=0;
for th=(-pi+pi/secth):pi/secth:pi
i=i+1;
j=0;
for phi=(-pi/2+pi/secphi):pi/secphi:pi/2
j=j+1;
VV(i,j)=R(i,j)^3*(sin(-pi/2+j*pi/secphi)-sin(-pi/2+(j-1)*pi/secphi))*pi/secth/3
end
end
for j=1:secphi
for i=1:2*secth
cont=0;
for theta2=(-pi+(i-1)*pi/secth):pi/(5*secth):(-pi+i*pi/secth)
cont=cont+1;
phi2=-pi/2+(j-1)*pi/secphi;
XX(cont)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(phi2);
YY(cont)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(phi2);
ZZ(cont)=R(i,j)*sin(phi2);
end
a(1)=0;
b(1)=0;
c(1)=0;
a(2)=R(i,j)*cos(-pi+(i-1)*pi/secth)*cos(phi2);
b(2)=R(i,j)*sin(-pi+(i-1)*pi/secth)*cos(phi2);
c(2)=R(i,j)*sin(phi2);
plot3(a,b,c,'black')
hold on
for phi2=(-pi/2+(j-1)*pi/secphi):pi/(10*secphi):(-pi/2+j*pi/secphi)
cont=cont+1;
theta2=-pi+i*pi/secth;
XX(cont)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(phi2);
YY(cont)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(phi2);
ZZ(cont)=R(i,j)*sin(phi2);
end
a(2)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(-pi/2+(j-1)*pi/secphi);
b(2)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(-pi/2+(j-1)*pi/secphi);
c(2)=R(i,j)*sin(-pi/2+(j-1)*pi/secphi);
plot3(a,b,c,'black')

```

```

hold on
for theta2=(-pi+i*pi/secth):-pi/(5*secth):(-pi+(i-1)*pi/secth)
cont=cont+1;
phi2=-pi/2+j*pi/secphi
XX(cont)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(phi2);
YY(cont)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(phi2);
ZZ(cont)=R(i,j)*sin(phi2);
end
a(2)=R(i,j)*cos(-pi+i*pi/secth)*cos(phi2);
b(2)=R(i,j)*sin(-pi+i*pi/secth)*cos(phi2);
c(2)=R(i,j)*sin(phi2);
plot3(a,b,c,'black')
hold on
for phi2=(-pi/2+j*pi/secphi):-pi/(5*secphi):(-pi/2+(j-1)*pi/secphi)
cont=cont+1;
theta2=-pi+(i-1)*pi/secth;
XX(cont)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(phi2);
YY(cont)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(phi2);
ZZ(cont)=R(i,j)*sin(phi2);
end
a(2)=R(i,j)*cos(theta2)*cos(-pi/2+j*pi/secphi);
b(2)=R(i,j)*sin(theta2)*cos(-pi/2+j*pi/secphi);
c(2)=R(i,j)*sin(-pi/2+j*pi/secphi);
plot3(a,b,c,'black')
hold on
plot3(XX,YY,ZZ,'black')
hold on
end
grid on
end
grid on

%Histograma angular por nivel
colores=0;
cont=0;
for phi=(-pi/2+pi/secphi):pi/secphi:pi/2
colores=colores+1/secphi;
i=0;
for j=1:n1
if (PHI3(j)>phi-pi/secphi)&(PHI3(j)<=phi)
i=i+1;
THETA4(i)=THETA3(j);
end
end
cont=cont+1;
subplot(2,4,cont)
rose(THETA4,2*secth)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',1.5,'Color','red')
end

```

### PROGRAMA 13

```

%REGIONES CON LOS DATOS ESFERIZADOS PROYECTADOS EN COORDENADAS
CILINDRICAS
clear;

```



```

clc;
n1=2000;
mu1 = [2 3 4];
SIGMA = [3 -3.6 2
-3.6 5 -1.5
2 -1.5 6];
datos= mvnrnd(mu1,SIGMA,n1);

%Esferización de los datos
SIGMA=cov(datos);
[V,D]=eig(SIGMA);
MU=mean(datos);
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
Z=(D^(-1/2)*V'*datosc)';
[THETA4,RHO4,Z4] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2),Z(:,3))
tajadas=12
t=[0:2*pi/tajadas:2*pi]';
radio=[min(Z4),max(Z4)];
CILX=sin(t)*ones(size(radio));
CILY=cos(t)*ones(size(radio));
CILZ=ones(1,size(t))'*radio;
mesh(CILX,CILY,CILZ)
XX=cos(THETA4);
YY=sin(THETA4);
hold on
plot3(XX,YY,Z4, '.');
cont=0;
for i=-3:0.2:3
for j=-3:0.2:3
if (9-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(9-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(9-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA5,RHO5,Z5] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA5);
YYP=sin(THETA5);
hold on
plot3(XXP,YYP,Z5, '.green');
cont=0;
for i=-4:0.2:4
for j=-4:0.2:4
if (16-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(16-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;

```

```

YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(16-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA6,RHO6,Z6] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA6);
YYP=sin(THETA6);
hold on
plot3(XXP,YYP,Z6, '.red');
rose(THETA4,tajadas)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',1.5,'Color','g')

```

## PROGRAMA 14

%REGIONES CON LOS DATOS ESFERIZADOS PROYECTADOS EN COORDENADAS CILINDRICAS

```

clear;
clc;
n1=2000;
mu1 = [2 3 4];
mu2= [4 5 9]
SIGMA = [3 -3.6 2
-3.6 5 -1.5
2 -1.5 6];
for i=1:n1
u=unifrnd(0,1)
if u < 0.4
datos(i,:)= mvnrnd(mu1,SIGMA);
else
datos(i,:)= mvnrnd(mu2,SIGMA);
end
end

%Esferización de los datos
SIGMA=cov(datos);
[V,D]=eig(SIGMA);
MU=mean(datos);
n=size(datos);
datosc=datos-ones(n(1),1)*MU;
Z=(D^(-1/2)*V'*datosc)';
[THETA4,RHO4,Z4] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2),Z(:,3))
tajadas=12
t=[0:2*pi/tajadas:2*pi]';
radio=[min(Z4),max(Z4)];
CILX=sin(t)*ones(size(radio));
CILY=cos(t)*ones(size(radio));
CILZ=ones(1,size(t))*radio;
mesh(CILX,CILY,CILZ)
XX=cos(THETA4);
YY=sin(THETA4);
hold on
plot3(XX,YY,Z4, '.');
cont=0;
for i=-3:0.2:3

```

```

for j=-3:0.2:3
if (9-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(9-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(9-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA5,RHO5,Z5] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA5);
YYP=sin(THETA5);
hold on
plot3(XXP,YYP,Z5,'.green');
cont=0;
for i=-4:0.2:4
for j=-4:0.2:4
if (16-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(16-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(16-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA6,RHO6,Z6] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA6);
YYP=sin(THETA6);
hold on
plot3(XXP,YYP,Z6,'.red');
rose(THETA4,tajadas)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',1.5,'Color','g')

```

## PROGRAMA 15

**%PROYECCIÓN PURSUIT PARA LA DATA CRABS**

```

clear;
clc;
X=load('crabs.txt')

% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2)*V'*Xc)';
N = 2;

```

```

m = 4;
c = tan(80*pi/180);
half = 30;
astar = zeros(d,N);
bstar = zeros(d,N);
ppmax = zeros(1,N);
% Ejecutar PPEDA.
Zt = Z;
i=1;
[astar(:,i),bstar(:,i),ppmax(i)] = csppeda(Zt,c,half,m);
% Se proyecta y visualiza la estructura
proj1 = [astar(:,1), bstar(:,1)];
proj2 = [astar(:,2), bstar(:,2)];
Zp1 = Z*proj1;
Zp2 = Z*proj2;
figure
plot(Zp1(:,1),Zp1(:,2),'k.'),title('Estructura')
xlabel('\alpha^*'),ylabel('\beta^*')
grid on

```

## FUNCIÓN PPEDA

```

function [as,bs,ppm]=csppeda(Z,c,half,m)
% Z is the spherred data.
[n,p] = size(Z);
maxiter = 1500;
cs = c;
cstop = 0.00001;
cstop = 0.01;
as = zeros(p,1);
bs = zeros(p,1);
ppm = realmin;
fnr = inline('r.*exp(-0.5*r.^2)','r');
ck = ones(1,40);
ck(1:8) = quadl(fnr,0,sqrt(2*log(6))/5)/8;
ck(9:16) = quadl(fnr,sqrt(2*log(6))/5,2*sqrt(2*log(6))/5)/8;
ck(17:24) = quadl(fnr,2*sqrt(2*log(6))/5,3*sqrt(2*log(6))/5)/8;
ck(25:32) = quadl(fnr,3*sqrt(2*log(6))/5,4*sqrt(2*log(6))/5)/8;
ck(33:40) = quadl(fnr,4*sqrt(2*log(6))/5,5*sqrt(2*log(6))/5)/8;
for i=1:m
% se genera un plano inicial aleatorio
a = randn(p,1);
mag = sqrt(sum(a.^2));
astar = a/mag;
b = randn(p,1);
bb = b-(astar'*b)*astar;
mag = sqrt(sum(bb.^2));
bstar = bb/mag;
clear a mag b bb
% encontrar el índice de proyección para este plano
ppimax = csppind(Z,astar,bstar,n,ck);
mi = 0;
h = 0;
c = cs;
while (mi < maxiter) & (c > cstop)
v = randn(p,1);

```

```

mag = sqrt(sum(v.^2));
v1 = v/mag;
t = astar+c*v1;
mag = sqrt(sum(t.^2));
a1 = t/mag;
t = astar-c*v1;
mag = sqrt(sum(t.^2));
a2 = t/mag;
t = bstar-(a1'*bstar)*a1;
mag = sqrt(sum(t.^2));
b1 = t/mag;
t = bstar-(a2'*bstar)*a2;
mag = sqrt(sum(t.^2));
b2 = t/mag;
ppi1 = csppind(Z,a1,b1,n,ck);
ppi2 = csppind(Z,a2,b2,n,ck);
[mp,ip] = max([ppi1,ppi2]);
if mp > ppimax
eval(['astar=a' int2str(ip) ';' ]);
eval(['bstar=b' int2str(ip) ';' ]);
eval(['ppimax=ppi' int2str(ip) ';' ]);
else
h = h+1;
end
mi = mi+1;
if h==half
c = c*.5;
h = 0;
end
end
if ppimax > ppm
as = astar;
bs = bstar;
ppm = ppimax;
end
end

```

## FUNCIÓN CSPPIND

```

function ppi = csppind(x,a,b,n,ck)
z = zeros(n,2);
ppi = 0;
pk = zeros(1,48);
eta = pi*(0:8)/36;
delang = 45*pi/180;
delr = sqrt(2*log(6))/5;
angles = 0:delang:(2*pi);
rd = 0:delr:5*delr;
nr = length(rd);
na=length(angles);
for j = 1:9
% encontrar el plano rotado
aj = a*cos(eta(j))-b*sin(eta(j));
bj = a*sin(eta(j))+b*cos(eta(j));
% proyectar los datos sobre este plano
z(:,1) = x*aj;

```

```

z(:,2) = x*bj;
% convertir a coordenadas polares
[th,r] = cart2pol(z(:,1),z(:,2));
ind = find(th<0);
th(ind) = th(ind)+2*pi;
for i=1:(nr-1)
for k=1:(na-1)
ind = find(r>rd(i) & r<rd(i+1) & th>angles(k) & th<angles(k+1));
pk((i-1)*8+k)=(length(ind)/n-ck((i-1)*8+k))^2/ck((i-1)*8+k);
end
end
for k=1:(na-1)
ind=find(r>rd(nr) & th>angles(k) & th<angles(k+1));
pk(40+k)=(length(ind)/n-(1/48))^2/(1/48);
end
ppi = ppi+sum(pk);
end
ppi = ppi/9;

```

## PROGRAMA APLICACION

%APLICACIÓN A LA DATA CRABS

%Proyección pursuit para la data crabs

clear;

clc;

% Datos

X=load('crabs.txt')

% Esferización de los datos

[n,d] = size(X);

muhat = mean(X);

[V,D] = eig(cov(X));

Xc = X-ones(n,1)\*muhat;

Z = ((D)^(-1/2)\*V'\*Xc')';

N = 2;

m = 4;

c = tan(80\*pi/180);

half = 30;

astar = zeros(d,N);

bstar = zeros(d,N);

ppmax = zeros(1,N);

% Ejecutar PPEDA.

Zt = Z;

i=1;

[astar(:,i),bstar(:,i),ppmax(i)] = csppeda(Zt,c,half,m);

proj1 = [astar(:,1), bstar(:,1)];

proj2 = [astar(:,2), bstar(:,2)];

Zp1 = Z\*proj1;

Zp2 = Z\*proj2;

figure

plot(Zp1(:,1),Zp1(:,2),'k.'),title('Estructura')

xlabel('\alpha^\*'),ylabel('\beta^\*')

grid on

%Proyección en un sistema cartesiano 3d (datos originales)

clear;

```

clc;
datos=load('crabs.txt');
a=[1 1 1 1 1]
b=[1 1 2 1 3]
alfa=a/sqrt(a*a')
k1=b-(sum(alfa*b'))*alfa
beta=k1/sqrt(k1*k1')
c=[2 1 3 2 2]
k2=c-(sum(alfa*c'))*alfa
k2g=k2/sqrt(k2*k2')
k3=k2g-(sum(beta*k2g'))*beta
gamma=k3/sqrt(k3*k3')
zalfa=datos*alfa';
zbeta=datos*beta';
zgamma=datos*gamma';
plot3(zalfa,zbeta,zgamma,'.red')
grid on

%Diagrama de rosa
clear;
clc;
clear;
clc;
% Datos
X=load('crabs.txt')
% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2))*V'*Xc';
N = 2;
m = 4;
c = tan(80*pi/180);
half = 30;
astar = zeros(d,N);
bstar = zeros(d,N);
ppmax = zeros(1,N);
% Ejecutar PPEDA.
Zt = Z;
i=1;
[astar(:,i),bstar(:,i),ppmax(i)] = csppeda(Zt,c,half,m);
proj1 = [astar(:,1), bstar(:,1)];
proj2 = [astar(:,2), bstar(:,2)];
Zp1 = Z*proj1;
Zp2 = Z*proj2;
a=2*pi/(max(Zp1(:,1))-min(Zp1(:,1)));
b=-a*min(Zp1(:,1));
theta=a*Zp1(:,1)+b;
subplot(1,2,1)
rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)
a=2*pi/(max(Zp1(:,2))-min(Zp1(:,2)));
b=-a*min(Zp1(:,2));
theta=a*Zp1(:,2)+b;
subplot(1,2,2)

```

```

rose(theta)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline,'LineWidth',2)

%Histograma circular 3d en coordenadas polares
clear;
clc;
sec=12;
h=2*pi/sec;
% Datos
X=load('crabs.txt')
% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2)*V'*Xc')';
N = 2;
m = 4;
c = tan(80*pi/180);
half = 30;
astar = zeros(d,N);
bstar = zeros(d,N);
ppmax = zeros(1,N);
% Ejecutar PPEDA.
Zt = Z;
i=1;
[astar(:,i),bstar(:,i),ppmax(i)] = csppeda(Zt,c,half,m);
proj1 = [astar(:,1), bstar(:,1)];
proj2 = [astar(:,2), bstar(:,2)];
Zp1 = Z*proj1;
Zp2 = Z*proj2;
[theta,rho] = cart2pol(Zp1(:,1),Zp1(:,2));
l=5;
CONTEO=zeros(1,sec);
n=size(Z);
for i=1:n(1)
kr=ceil(rho(i));
if theta(i)>=0
ktheta=ceil(theta(i)/h);
end
if theta(i)<0
ktheta=ceil((theta(i)+2*pi)/h);
end
CONTEO(kr,ktheta)=CONTEO(kr,ktheta)+1;
end
PROP=CONTEO/sum(sum(CONTEO));
cc=1
%Número de subtajadas
hh=5
for i=1:l
A(i)=(pi/sec)*cc^2*(2*i-1)
end
factor=1/sum(CONTEO'*A')
ha=factor*CONTEO
for th=h:h:2*pi
for i=1:l

```



```

th1=(th-h):h/hh:th];
th2=[th:-h/hh:(th-h)];
XX=[cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)
cc*(i-1)*cos(th1),cc*i*cos(th2),cc*(i-1)*cos(th-h)];
YY=[cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)
cc*(i-1)*sin(th1),cc*i*sin(th2),cc*(i-1)*sin(th-h)];
nz=size(XX);
ZZ=zeros(nz(1),nz(2));
ZZ(2,:)=ha(i,round(th/h));
CC=(i/l)*ones(nz(1),nz(2));
mesh(XX,YY,ZZ,CC)
hold on
end
end
sum(ha'*A')

%Proyección de los datos sobre una superficie esférica
clear;
clc;
datos=load('crabs.txt');
a=[1 1 1 1 1]
b=[1 1 2 1 3]
alfa=a/sqrt(a*a')
k1=b-(sum(alfa*b'))*alfa
beta=k1/sqrt(k1*k1')
c=[2 1 3 2 2]
k2=c-(sum(alfa*c'))*alfa
k2g=k2/sqrt(k2*k2')
k3=k2g-(sum(beta*k2g'))*beta
gamma=k3/sqrt(k3*k3')
zalfa=datos*alfa';
zbeta=datos*beta';
zgamma=datos*gamma';
X=[zalfa zbeta zgamma]

% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2))*V'*Xc';
for i=1:n
ZN(i,1:3)=Z(i,1:3)/norm(Z(i,1:3));
end
plot3(ZN(:,1),ZN(:,2),ZN(:,3),'.red')
grid on
hold on
%geodésicas
indice=0;
n=5;
for i=1:n
for j=1:n
indice=indice+1;
d(indice,1)=i;
d(indice,2)=j;
d(indice,3)=acos(ZN(i,:)*ZN(j,:));
end

```

```

end
%Proyección de los datos sobre una superficie cilíndrica
clear;
clc;
datos=load('crabs.txt');
a=[1 1 1 1 1]
b=[1 1 2 1 3]
alfa=a/sqrt(a*a')
k1=b-(sum(alfa*b'))*alfa
beta=k1/sqrt(k1*k1')
c=[2 1 3 2 2]
k2=c-(sum(alfa*c'))*alfa
k2g=k2/sqrt(k2*k2')
k3=k2g-(sum(beta*k2g'))*beta
gamma=k3/sqrt(k3*k3')
zalfa=datos*alfa';
zbeta=datos*beta';
zgamma=datos*gamma';
X=[zalfa zbeta zgamma]

% Esferización de los datos
[n,d] = size(X);
muhat = mean(X);
[V,D] = eig(cov(X));
Xc = X-ones(n,1)*muhat;
Z = ((D)^(-1/2))*V'*Xc)';
[THETA4,RHO4,Z4] = cart2pol(Z(:,1),Z(:,2),Z(:,3))
tajadas=12
t=[0:2*pi/tajadas:2*pi]';
radio=[min(Z4),max(Z4)];
CILX=sin(t)*ones(size(radio));
CILY=cos(t)*ones(size(radio));
CILZ=ones(1,size(t))'*radio;
mesh(CILX,CILY,CILZ)
XX=cos(THETA4);
YY=sin(THETA4);
hold on
plot3(XX,YY,Z4,'.');
cont=0;
for i=-3:0.2:3
for j=-3:0.2:3
if (9-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(9-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(9-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA5,RHO5,Z5] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA5);
YYP=sin(THETA5);
hold on

```

```

plot3(XXP,YYP,Z5, '.green');
cont=0;
for i=-4:0.2:4
for j=-4:0.2:4
if (16-i^2-j^2)>0
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=sqrt(16-i^2-j^2);
cont=cont+1;
XP(cont)=i;
YP(cont)=j;
ZP(cont)=-sqrt(16-i^2-j^2);
end
end
end
[THETA6,RHO6,Z6] = cart2pol(XP,YP,ZP)
XXP=cos(THETA6);
YYP=sin(THETA6);
hold on
plot3(XXP,YYP,Z6, '.red');
rose(THETA4,tajadas)
hline = findobj(gca,'Type','line');
set(hline, 'LineWidth',1.5, 'Color', 'g')

%Geodésicas
indice=0;
n=5;
for i=1:n
for j=1:n
indice=indice+1;
d(indice,1)=i;
d(indice,2)=j;
d(indice,3)=sqrt((THETA4(i)-THETA4(j))^2+(Z4(i)-Z4(j))^2);
end
end

```